MIC-OPREA DANIELA

MIC-OPREA VLAD-CRISTIAN

ÎNVĂȚĂM

ȘI

DEMONSTRĂM

ALGEBRĂ

GEOMETRIE

V - VIII

SATU-MARE
2025

Această carte oferă o abordare clară și structurată a teoriei și metodelor de rezolvare a problemelor necesare pentru succesul la Evaluarea Națională. Conceput pentru elevii claselor V-VIII, volumul explică noțiunile fundamentale prin definiții precise și proprietăți esențiale facilitând înțelegerea profundă a matematicii.

MIC-OPREA DANIELA MIC-OPREA VLAD-CRISTIAN

ÎNVĂȚĂM
ȘI
DEMONSTRĂM

ALGEBRĂ - GEOMETRIE

V-VIII

SATU-MARE

2025

ISBN 978-973-0-41708-1

Cartea este un instrument esențial pentru elevi, oferindu-le sprijin în aplicarea și aprofundarea cunoștințelor, realizarea conexiunilor între diferite concepte și descoperirea unor informații noi. Poate fi utilizată atât la clasă, cât și în studiul individual, fiind un aliat valoros în pregătirea pentru Evaluarea Națională. „Învățăm și demonstrăm” îi ajută pe elevi să-și consolideze cunoștințele și să-și dezvolte gândirea logică, contribuind astfel la obținerea unor rezultate excelente.

Cuprins

ALGEBRĂ	Nr. pagină
1. Mulțimi. Cardinalul unei mulțimi	7
2. Mulțimi numerice	7
3. Modulul unui număr real	7
4. Opusul unui număr real	8
5. Inversul unui număr real	8
6. Partea întreagă. Partea fracționară	8
7. Operații cu mulțimi	9
8. Intervale de numere reale	9
9. Divizibilitate. Proprietățile relației de divizibilitate	9
10. Număr divizori. Suma divizorilor. Numere prime. Numere compuse	10
11. C.M.M.D.C; C.M.M.M.C. Numere prime între ele	10
12. Criterii de divizibilitate	11
13. Numere consecutive	11
14. Descompunerea zecimală a numerelor	11
15. Medii. Probabilitate	12
16. Fracții ordinare	12
17. Proporții	13
18. Mărimi direct și invers proporționale	13
19. Procente	14
20. Operații cu numere naturale. Suma Gauss	15
21. Teorema împărțirii cu rest	15
22. Reguli de calcul cu puteri	16
23. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte	16
24. Un număr NU este PĂTRAT PERFECT dacă...	17
25. Operații cu numere întregi	17
26. Operații cu fracții ordinare	18
27. Operații cu fracții zecimale	19
28. Transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare	20
29. Transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale	20
30. Radicali	21
31. Operații cu numere reale reprezentate prin litere	22
32. Formule de calcul prescurtat	22
33. Descompunerea	22
34. Operații cu rapoarte de numere reale reprezentate prin litere	23
35. Enunțuri. Expresii	24
36. Ecuații (de gradul I și al II-lea) și inecuații	26
37. Sisteme de ecuații	28
38. Funcții. Distanța dintre două puncte. Mijlocul unui segment	29

GEOMETRIE

	Nr. pagină
1. Unități de măsură	33
2. Punct. Dreaptă. Plan	34
3. Unghiuri	35
4. Triunghiul. Clasificare	38
5. Criterii de congruență a două triunghiuri	39
6. Linii importante în triunghi	40
7. Proprietățile triunghiului isoscel.	42
Cum demonstrăm că un triunghi este isoscel?	
8. Proprietățile triunghiului echilateral.	43
Cum demonstrăm că un triunghi este echilateral?	
9. Proprietățile triunghiului dreptunghic	44
Cum demonstrăm că un triunghi este dreptunghic?	
Cum demonstrăm că un triunghi este dreptunghic isoscel?	
10. Relații metrice în triunghiul dreptunghic	46
11. Linia mijlocie în triunghi și trapez	47
12. Teorema paralelelor echidistante. Teorema paralelelor neechidistante	48
13. Teorema lui Thales	48
14. Asemănarea triunghiurilor	49
15. Cum demonstrăm că două segmente sunt congruente?	50
16. Cum demonstrăm că punctele sunt coliniare?	52
17. Cum demonstrăm că dreptele sunt paralele?	53
18. Cum demonstrăm că două drepte sunt perpendiculare?	55
19. Cum demonstrăm că dreptele sunt concurente?	58
20. Cum demonstrăm că patru puncte sunt coplanare?	59
21. Patrulatere convexe	59
22. Cum demonstrăm că un patrulater convex este...?	61
23. Cercul	62
24. Poligoane regulate	64
25. Perimetrele și ariile figurilor geometrice	65
26. Geometrie în spațiu. Cum demonstrăm că...?	67
27. Teorema celor trei perpendiculare. Reciprocele	69
28. Distanțe în spațiu	70
29. Unghiuri în spațiu	72
30. Prisma: Paralelipiped dreptunghic, Cub, Prisma regulată	75
31. Piramida regulată	77
32. Corpuri rotunde	79
33. Trunchiul de piramidă regulată. Trunchiul de con	80

ALGEBRĂ

MULȚIMI

Mulțimea este o colecție de obiecte bine determinate și distincte

Cardinalul unei mulțimi reprezintă numărul de elemente ale unei mulțimi
Mulțimea vidă "$\emptyset$" mulțimea care nu conține nici un element
$x \in A$ "elementul x **aparține** mulțimii A" $\notin$ **- nu aparține**

$A \subset B$ "mulțimea A este **inclusă** în mulțimea B" (toate elementele mulțimii A se găsesc în mulțimea B)

MULȚIMI NUMERICE

N = mulțimea numerelor naturale

N = {0; 1; 2; 3; …;10; 11; …} $\quad N^* = N/\{0\}$ **= {1;2; 3; …;10; 11; …}**

Z = mulțimea numerelor întregi

Z = {… -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; …} $\quad Z^* = Z/\{0\}$ **= {… -3; -2; -1;1; 2; 3; …}**

Q = mulțimea numerelor raționale

$Q = \left\{\frac{a}{b} / \, a, b \in Z, b \neq 0\right\}$ $\quad Q^* = Q/\{0\}$

Obs.: Un număr este rațional dacă se poate transforma în fracție ordinară, cu numărătorul și numitorul numere întregi.

R/Q = mulțimea numerelor iraționale

Un număr este irațional dacă nu se poate scrie ca o fracție ordinară, cu numărătorul și numitorul numere întregi.

Ex: $\sqrt{3}$; $2\sqrt{5}$; 2,131131113… ; π (pi)$\simeq$ 3,14 $\quad (\simeq aproximativ)$

R = mulțimea numerelor reale

$R = (-\infty, +\infty)$ $\quad R^* = R/\{0\}$

Obs.: R = mulțimea numerelor raționale împreună cu mulțimea numerelor iraționale *(toate numerele)*

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Modulul (valoarea absolută) unui număr real

$$|x| = \begin{cases} x & , dacă\ x > 0 \\ 0 & , dacă\ x = 0 \\ -x & , dacă\ x < 0 \end{cases}$$

Ex: $|3| = 3$ $\quad |-\sqrt{7}| = \sqrt{7}$

Proprietățile modulului

1. $\|x\| \geq 0$	2. $\|x+y\| \neq \|x\| + \|y\|$
3. $\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|$	4. $\|x-y\| \neq \|x\| - \|y\|$
5. $\left\|\frac{x}{y}\right\| = \frac{\|x\|}{\|y\|}$	6. $\|x\| - \|y\| \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Opusul unui număr real

Opusul numărului **a** este **-a**

Ex: Opusul numărului 3 este -3

Opusul numărului **-a** este **+a** sau **a**

Ex: Opusul numărului -0,25 este +0,25

Inversul unui număr real

- Inversul numărului $\frac{a}{b}$ este $\frac{b}{a}$
- Inversul numărului $\frac{1}{a}$ este $\frac{a}{1}$
- Inversul numărului **a** este $\frac{1}{a}$

Obs: $a = \frac{a}{1}$

Partea întreagă și partea fracționară

Partea întreagă a numărului x

[x] este cel mai mare număr întreg mai mic decât x

Ex: [3,15] = 3

[-3,15] = -4

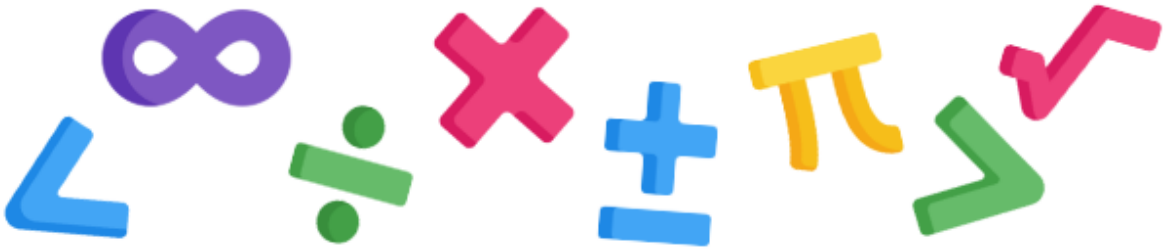
Partea fracționară a numărului x

{x} = x - [x]

Ex: {3,15} = 3,15 - 3 = 0,15

{-3,15} = -3,15 - (-4) = -3,15 + 4 = 0,85

Obs.: $0 \leq \{x\} < 1$



OPERAȚII CU MULȚIMI

Intersecția este mulțimea formată din ***elementele comune*** mulțimilor A și B.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$ $\qquad A \cap B = B \cap A$

Reuniunea este mulțimea formată din ***elementele comune și necomune*** ale mulțimilor A sau B.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$ $\qquad A \cup B = B \cup A$

Diferența dintre A și B este mulțimea formată din ***elementele lui A care nu aparțin lui B.***

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$ $\qquad A \setminus B \neq B \setminus A.$

Obs.: Ordinea în care realizăm diferența a două mulțimi este importantă: $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Produsul cartezian este mulțimea formată din ***toate perechile ordonate (a, b)*** unde a este element al mulțimii A și b este element al mulțimii B

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$ $\qquad A \times B \neq B \times A$

INTERVALE DE NUMERE REALE

Intervale mărginite	Intervale nemărginite
Interval închis $[a,b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$ $a, b \in [a, b]$	***Interval deschis la dreapta*** $(-\infty, a) = \{x \in R \mid x < a\}$ $a \notin (-\infty, a)$
Interval deschis $(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$ $a, b \notin (a, b)$	***Interval închis la dreapta*** $(-\infty, a] = \{x \in R \mid x \leq a\}$ $a \in (-\infty, a]$
Interval închis la stânga și deschis la dreapta $[a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$ $a \in [a, b) \quad b \notin [a, b)$	***Interval deschis la stânga*** $(a, +\infty) = \{x \in R \mid x > a\}$ $a \notin (a, +\infty)$
Interval deschis la stânga și închis la dreapta $(a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$ $a \notin (a, b] \quad b \in (a, b]$	***Interval închis la stânga*** $[a, +\infty) = \{x \in R \mid x \geq a\}$ $a \in [a, +\infty)$

DIVIZIBILITATE

$a \vdots b$ „a divizibil cu b” sau ”a se divide cu b” $\qquad a \vdots b \implies a : b = c,\ rest\ 0$

$e \,/\, d$ „e divide pe d” $\qquad e \,/\, d \implies d : e = f,\ rest\ 0$

Dacă $\mathbf{a = b \cdot c}$ atunci **a** este **multiplu** lui b, iar **b** este **divizor** al lui a.

Ex: $D_{12} = \{1, 12, 2, 6, 3, 4\}$ (divizorii naturali)

$D_{12} = \{\pm 1,\ \pm 12,\ \pm 2,\ \pm 6,\ \pm 3,\ \pm 4\}$ (divizorii întregi)

$M_{12} = \{0, 12, 24, 36, \dots\}$ (multiplii naturali)

$M_{12} = \{0, \pm 12, \pm 24, \pm 36, \dots\}$ (multiplii întregi)

Fie a număr natural. Numerele 1 și a se numesc **divizori improprii** iar restul (dacă există) sunt **divizori proprii**.

Numărul divizorilor unui număr natural. Suma divizorilor unui număr natural

- Descompunem numărul în produs de puteri de numere prime

$$a = {x_1}^{p_1} \cdot {x_2}^{p_2} \cdot \ldots \cdot {x_n}^{p_n}, unde\ x_1, x_2, \ldots, x_n\ numere\ prime$$

- $nr.divizori = (p_1 + 1) \cdot (p_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (p_n + 1)$
- $suma\ divizorilor = \frac{{x_1}^{p_1+1}-1}{x_1-1} \cdot \frac{{x_2}^{p_2+1}-1}{x_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{{x_n}^{p_n+1}-1}{x_n-1}$

Proprietățile relației de divizibilitate

$a \vdots 1 \qquad a \vdots a$	$a \vdots c$ *şi* $b \vdots c \Longrightarrow (a+b) \vdots c$ *şi* $(a-b) \vdots c$
$a \vdots b$ şi $b \vdots c \Longrightarrow a \vdots c$	$a \vdots b \Longrightarrow (a \cdot n) \vdots b$

Număr prim: Numărul care are exact doi divizori (1 și el însuși)

Numere prime mai mici decât 100:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97

Număr compus: Numărul care are cel puțin trei divizori (numerele care nu sunt prime)

Obs.: Numerele 0 și 1 nu sunt nici prime, nici compuse.

Cum verificăm dacă un număr este prim sau compus?

- Verificăm cu ajutorul criteriilor de divizibilitate învățate
- Împărțim numărul dat la numerele prime în ordine crescătoare, până când câtul devine mai mic decât împărțitorul. Dacă restul tuturor împărțirilor nu este 0 atunci numărul este prim. Dacă restul uneia din împărțiri este 0 atunci numărul este compus.

Numere prime între ele: dacă c.m.m.d.c al lor este 1.

Cel mai mare divizor comun c.m.m.d.c. sau ( )

- Descompunem numerele în produs de puteri de numere prime
- Înmulțim factorii primi comuni, luați o singură dată, la puterea cea mai mică

Aplicații privind c.m.m.d.c.

Fie a,b numere naturale nenule și d cel mai mare divizor comun al lor

$$(a, b) = d \Longrightarrow există\ x, y\ nr.nat.astfel\ încât\ a = d \cdot x;\ b = d \cdot y\ şi\ (x, y) = 1$$

Cel mai mic multiplu comun c.m.m.m.c. sau [ ]

- Descompunem numerele în produs de puteri de numere prime
- Înmulțim factorii primi comuni și necomuni, luați o singură dată, la puterea cea mai mare

Legătura dintre c.m.m.d.c și c.m.m.m.c.

Dacă a, b numere naturale nenule, atunci $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$

CRITERII DE DIVIZIBILITATE

Criteriul cu 2 **a ⋮ 2 dacă:**

- ultima cifră a numărului a este 0, 2, 4, 6 sau 8
- a este par (a = 2n, unde n∈ N)
- a se poate descompune în produs de două sau mai multe numere consecutive

Criteriul cu 5 **a ⋮ 5 dacă:**

- ultima cifră a numărului a este 0 sau 5
- a este de forma 5n, unde n∈ N

Criteriul cu 10 **a ⋮ 10 dacă:**

- ultima cifră a numărului a este 0
- a este de forma 10n, unde n∈ N

Criteriul cu 3 **a ⋮ 3 dacă:**

- suma cifrelor numărului a este divizibilă cu 3
- a este de forma 3n, unde n∈ N

Criteriul cu 9 **a ⋮ 9 dacă:**

- suma cifrelor numărului a este divizibilă cu 9
- a este de forma 9n, unde n∈ N

Criteriul cu 4 **a ⋮ 4 dacă:**

- numărul format din ultimele două cifre ale numărului a este divizibil cu 4
- a este de forma 4n, unde n∈ N

Criteriul cu 25 **a ⋮ 25 dacă:**

- ultimele două cifre ale numărului a sunt 00, 25, 50 sau 75
- a este de forma 25n, unde n∈ N

Fie M_a *multiplu lui a*, M_b *multiplu lui b*

$(a+b)^n = M_a + b^n$	$(a-b)^{2n} = M_a + b^{2n}$	$(a-b)^{2n+1} = M_a - b^{2n+1}$
$(a+b)^n = a^n + M_b$	$(a-b)^{2n} = a^{2n} + M_b$	$(a-b)^{2n+1} = a^{2n+1} + M_b$

Numere consecutive

Numere consecutive **a; a+1; a+2; a+3; ...**

Numere consecutive pare **2a; 2a+2; 2a+4; 2a+6; ...**

Numere consecutive impare **2a+1; 2a+3; 2a+5; ...**

... 2a-5; 2a-3; 2a-1

Descompunerea zecimală a numerelor naturale

$\overline{ab} = 10a + 1b$

$\overline{abc} = 100a + 10b + 1c$

$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + 1d$

MEDII

Media aritmetică *a două numere a și b* $m_a = \frac{a+b}{2}$	**Media aritmetică ponderată** Fie numerele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ cu ponderile $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ $m_{ap} = \frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + a_3 \cdot p_3 + \dots + a_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}$
Media aritmetică *a n numere* $m_a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n}{n}$	**Media geometrică** $m_g = \sqrt{a \cdot b}$, a·b≥0

PROBABILITATE

$P = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$ $P = \frac{a}{a} = 1$ *eveniment sigur*, $P = \frac{0}{a} = 0$ *eveniment imposibil*

FRACȚII ORDINARE $\frac{a\ (\text{numărător})}{b\ (\text{numitor})}$, b ≠ 0

Clasificarea fracțiilor

- Subunitare ⟹ numărător < numitor (este cuprinsă între 0 și 1)
- Supraunitare⟹numărător > numitor (este mai mare decât 1)
- Echiunitare ⟹numărător = numitor (este egală cu 1)

Amplificarea fracției cu numărul natural c

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ $c \neq 0$

Simplificarea fracției cu numărul natural c

$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$ $c \neq 0$

Fracții echivalente (fracții egale)

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Introducerea întregilor în fracție

$a\frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}$ $c \neq 0$

Scoaterea întregilor din fracție

$\frac{a}{b} = a : b = c,\ r \implies \frac{a}{b} = c\frac{r}{b}$

(a > b $c \neq 0,$)

Compararea fracțiilor

a) Cu același numitor $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{b}$

comparăm numărătorii :

dacă $a > c \implies \frac{a}{b} > \frac{c}{b}$

b) Cu același numărător $\frac{a}{b}$ și $\frac{a}{c}$

comparăm numitorii :

dacă b> $c \implies \frac{a}{b} < \frac{a}{c}$

c) Cu numărători și numitori diferiți $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$

1. Calculăm $a \cdot d$ și $b \cdot c$

   Dacă $a \cdot d > b \cdot c \implies \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

sau

2. Aducem fracțiile la același numitor apoi comparăm după regula de la a)

PROPORȚII

Raport $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ **Proporție** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **unde a, d extremi și b, c mezi**

Proprietatea fundamentală a proporției **Într-o proporție produsul extremilor este egal cu produsul mezilor.** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

Proporții derivate pornind de la $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

1. **Schimbarea extremilor între ei** $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$
2. **Schimbarea mezilor între ei** $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
3. **Inversarea rapoartelor** $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
4. **Modificarea numărătorilor sau a numitorilor prin:**
   a) **Adunarea numitorilor la numărători (sau invers)** $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$
   b) **Scăderea numitorilor la numărători (sau invers)** $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$; $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$
5. **Șir de rapoarte egale** $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$

MĂRIMI DIRECT PROPORȚIONALE

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\} \text{ d. p. } \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{k}{1}$$

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{k}{1} \Rightarrow a_1 \cdot 1 = b_1 \cdot k \Rightarrow a_1 = b_1 \cdot k$

$\frac{a_2}{b_2} = \frac{k}{1} \Rightarrow a_2 \cdot 1 = b_2 \cdot k \Rightarrow a_2 = b_2 \cdot k$ ș.a.m.d.

- Înlocuim $a_1, a_2, \ldots$ (aflate anterior) în relația dată în problemă și aflăm k
- Aflăm $a_1, a_2, \ldots$

MĂRIMI INVERS PROPORȚIONALE

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\} \text{ i. p. } \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\} \Rightarrow a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = \cdots a_n \cdot b_n = k$$

$a_1 \cdot b_1 = k \Rightarrow a_1 = k : b_1$

$a_2 \cdot b_2 = k \Rightarrow a_2 = k : b_2$ ș.a.m.d.

- Înlocuim $a_1, a_2, \ldots$ (aflate anterior) în relația dată în problemă și aflăm k
- Aflăm $a_1, a_2, \ldots$

Obs.: k = constanta de proporționalitate

PROCENTE

Raport procentual un raport de forma $\frac{p}{100}$, notat **p%** (unde p $\in Q_+$, p≥0)

1. **Aflarea unui procent p% dintr-un număr dat**
   p% din x = $\frac{p}{100} \cdot x$
2. **Aflarea unui număr când se știe un procent din el**
   p% din x este y, adică $\frac{p}{100} \cdot x = y$,
3. **Aflarea raportului procentual a două numere sau ”Cât la sută reprezintă numărul y din numărul x”**

Obs.: Putem reformula enunțul ”Cât la sută din numărul x reprezintă numărul y”

$p\% \cdot x = y \implies \frac{p}{100} \cdot x = y \Rightarrow \frac{p}{100} = \frac{y}{x}$

Calculăm p din proporția obținută => $p = \frac{y \cdot 100}{x}$

4. **Creșteri și scăderi cu p%**
   Fie x un număr rațional pozitiv:
   a) **Creștere (majorare, scumpire, mărire) cu p%**
      x + p% · x = y **y este valoarea după creșterea cu p%**

   b) **Scădere (ieftinire, micșorare) cu p%**
      x - p% · x = y **y este valoarea după scăderea cu p%**

5. **Procente din procente**
   $p\%\ din\ a\%\ din\ x = \frac{p}{100} \cdot \frac{a}{100} \cdot x$
6. **Mai multe modificări de preț**

Obs.: În problemele în care avem două modificări de preț și prețul inițial nu se cunoaște vom avea două necunoscute: **x prețul inițial, y prețul după prima modificare de preț și două relații matematice:**

1. x + p% · x = y (majorare) sau x - p% · x = y (ieftinire), unde y reprezintă prețul după prima majorare (ieftinire)
2. y + s% · y = a (majorare) sau y - s% · y = a (ieftinire), unde a reprezintă prețul final

OPERAȚII CU NUMERE NATURALE

Adunarea numerelor naturale

a + b = c, a,b termenii sumei c suma

Suma Gauss

S = 1 + 2 + 3 + … + n = [n · (n + 1)] : 2

S = $[(a_1 + a_n) \cdot n] : 2$

(unde a_1 este primul termen al sumei, a_n este ultimul termen al sumei, iar n este numărul de termeni din sumă)

Număr termeni

De la a la b avem:

- **b – a + 1** termeni (dacă termenii sunt consecutivi)
- **(b - a) : k + 1** termeni, unde k este diferența dintre doi termeni consecutivi ai sumei (dacă termenii nu sunt consecutivi)

Scăderea numerelor naturale

a – b = c a descăzut; b scăzător; c diferență

Înmulțirea numerelor naturale

a · b = c a, b factorii produsului; c produsul

Împărțirea numerelor naturale

a : b = c , r a deîmpărțit; b împărțitor; c cât ; r rest

Teorema împărțirii cu rest

$D : Î = C \text{ şi } R \Longrightarrow$ **D = Î · C + R, R < Î**

D - deîmpărțit, Î - împărțitor, C - cât, R - rest

PUTERI

Reguli de calcul cu puteri

$a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, *de m ori* a - baza, m - exponentul	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$a^1 = a$	$a^m : a^n = a^{m-n}$
$a^0 = 1$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
0^0, *nu are sens*	a^{m^n} *se calculează mai întâi* m^n
$0^n = 0$	$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
$1^n = 1$	$a^m : b^m = (a : b)^m$, b≠0
$(-a)^{nr.\ par} = a^{nr.\ par}$, a nr. pozitiv	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, a,b≠0
$(-a)^{nr.\ impar} = -a^{nr.\ impar}$, a nr. pozitiv	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, a≠0

Pătrate perfecte

Un număr natural *n* este **pătrat perfect** dacă există un număr natural *a*, astfel încât n = a^2.

Cuburi perfecte

Un număr natural *n* este **cub perfect** dacă există un număr natural *a*, astfel încât n = a^3.

Ce trebuie să știm despre pătratele perfecte?

- Ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi doar una din cifrele 0, 1, 4, 5, 6 sau 9
- Produsul unor numere pătrate perfecte este un pătrat perfect
- Orice pătrat perfect are una din formele $4 \cdot p$, $8 \cdot p + 1$, $3 \cdot p$, $3 \cdot p + 1$ (p număr natural)
- Fiecare factor prim din descompunerea unui pătrat perfect în produse de numere naturale este la o putere pară

Dacă identificăm una din proprietățile enunțate mai sus, spunem că un număr **POATE** fi un pătrat perfect.

Reținem

1. Toate pătratele perfecte de numere impare au cifra zecilor pară
2. Diferența dintre două pătrate perfecte consecutive $(k+1)^2$ *şi* k^2 este 2 · k + 1

Ultima cifră a bazei	*Ultima cifră a puterii*
0, 1, 5, 6	Se păstrează 0, 1, 5, 6

Ultima cifră a bazei	*Ultima cifră a puterii*	
	2·k+1	2·k
4	4	6
9	9	1

Ultima cifră a bazei	*Ultima cifră a puterii*			
	4·k+1	4·k+2	4·k+3	4·k
2	2	4	8	6
3	3	9	7	1
7	7	9	3	1
8	8	4	2	6

Un număr natural **NU ESTE PĂTRAT PERFECT** dacă:

- Are ultima cifră 2, 3, 7 sau 8.
- Are una din formele: $4 \cdot k + 2$; $4 \cdot k + 3$; $3 \cdot k + 2$, (k număr natural).
- Are în descompunerea sa factori primi la puteri impare.
- Este cuprins între două pătrate de numere naturale consecutive.
- Are cifra unităților 1, 5 sau 9 și cifra zecilor impară.
- Se divide cu 3, dar nu și cu 9.
- În general se divide cu un număr prim p, dar nu și cu p^2.

OPERAȚII CU NUMERE ÎNTREGI

Adunarea numerelor întregi

a) Cu același semn: se lasă semnul lor și se adună modulele numerelor
b) Cu semne diferite: se lasă semnul numărului cu modulul mai mare și se scad modulele lor

Înmulțirea și împărțirea numerelor întregi

a) Stabilim semnul după regula semnelor
Regula semnelor **Obs.:** Regula semnelor este valabilă și pentru împărțire.
$+ \cdot + = +$ $- \cdot - = +$ $+ \cdot - = -$ $- \cdot + = -$
b) Înmulțim/împărțim modulele numerelor întregi

Ridicarea la putere. Folosim tabelul ”Reguli de calcul cu puteri” (pag. 16)

$(-1)^{nr.\ par} = +1$ $(-)^{nr.\ par} = +$
$(-1)^{nr.\ impar} = -1$ $(-)^{nr.\ impar} = -$

OPERAȚII CU MUMERE RAȚIONALE

FRACȚII ORDINARE

Adunarea / scăderea fracțiilor ordinare

a) **Fracții cu același numitor** $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$

$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$

Se lasă numitorul neschimbat și se adună/scad numărătorii între ei

b) **Fracții cu numitori diferiți** $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\cdots$ (nu se poate efectua dacă nu au același numitor).

Procedăm astfel:

- Aducem fracțiile la același numitor (calculăm c.m.m.m.c. al numitorilor, împărțim c.m.m.m.c. la fiecare numitor, amplificăm fracțiile cu câturile obținute)

- Procedăm după regula de la ”fracții cu același numitor”

Înmulțirea fracțiilor ordinare

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

- Simplificăm fracțiile (dacă se poate)
- Înmulțim numărător cu numărător și numitor cu numitor

Împărțirea fracțiilor ordinare

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

- Se transformă în înmulțire astfel: prima fracție rămâne neschimbată iar a doua se inversează
- Se înmulțesc după regula de la înmulțirea fracțiilor ordinare

Ridicarea la putere a fracțiilor ordinare

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

- Se ridică la putere atât numărătorul cât și numitorul
- Folosim tabelul ”Reguli de calcul cu puteri” (pag. 16)

FRACȚII ZECIMALE

Adunarea/scăderea fracțiilor zecimale

- Se așează termenii sumei/diferenței unul sub altul astfel încât partea întreagă să fie sub parte întreagă, virgula sub virgulă, partea zecimală sub parte zecimală
- Se efectuează adunarea/scăderea ca la numerele naturale, iar virgula se coboară la rezultat.

Obs.: Dacă termenii sumei (sau diferenței) nu au același număr de zecimale, SE ADAUGĂ ZEROURI după ultima cifră de la partea zecimală, astfel încât numărul de zecimale să fie același.

Înmulțirea fracțiilor zecimale

Înmulțirea unei fracții zecimale cu o putere a lui 10

- Se mută virgula spre dreapta peste atâtea cifre cât este exponentul lui 10.

Înmulțirea a două fracții zecimale care au un număr finit de zecimale nenule. Înmulțirea unui număr zecimal cu un număr natural

- Se efectuează înmulțirea numerelor neținând seama de virgulă, iar rezultatul se desparte prin virgulă, numărând de la dreapta spre stânga, atâtea cifre zecimale câte au cele două numere zecimale împreună.

Împărțirea fracțiilor zecimale

Împărțirea unei fracții zecimale cu o putere a lui 10

- Se mută virgula spre stânga peste atâtea cifre cât este exponentul lui 10.

Împărțirea a două fracții zecimale finite

- Înmulțim împărțitorul cu o putere a lui 10 astfel încât el să devină număr natural
- Cu cât am înmulțit împărțitorul, înmulțim și deîmpărțitul
- Împărțim mai întâi partea întreagă la numărul obținut
- La câtul obținut vom pune virgula, apoi vom continua împărțirea, ca în cazul numerelor naturale, fără a ține cont de virgula de la deîmpărțit.

Ridicarea la putere cu exponent natural a unei fracții zecimale finite

- Înmulțim fracția zecimală dată cu ea însăși de n ori (n exponentul)
- Folosim tabelul ”Reguli de calcul cu puteri” (pag. 16)

TRANSFORMAREA FRACȚIILOR ZECIMALE ÎN FRACȚII ORDINARE

A) Transformarea fracțiilor zecimale finite

$$\overline{a,b} = \frac{\overline{ab}}{10} \qquad \overline{a,bc} = \frac{\overline{abc}}{100} \qquad \overline{a,bcd} = \frac{\overline{abcd}}{1000}$$

- La numărător scriem numărul format din toate cifrele (dar fără virgulă);
- La numitor scriem numărul format din 1 urmat de atâtea zerouri câte cifre se găsesc după virgulă;

B) Transformarea fracțiilor zecimale periodice simple

$$\overline{a,(b)} = \frac{\overline{ab}-a}{9} \qquad \overline{a,(bc)} = \frac{\overline{abc}-a}{99} \qquad \overline{a,(bcd)} = \frac{\overline{abcd}-a}{999}$$

- La numărător scriem numărul format din toate cifrele (fără virgulă) și scădem numărul format din cifrele aflate înaintea perioadei;
- La numitor scriem numărul format din atâția de 9 câte cifre avem în perioadă;

C) Transformarea fracțiilor zecimale periodice mixte

$$\overline{a,b(c)} = \frac{\overline{abc}-\overline{ab}}{90} \qquad \overline{a,b(cd)} = \frac{\overline{abcd}-\overline{ab}}{990} \qquad \overline{a,bc(d)} = \frac{\overline{abcd}-\overline{abc}}{900}$$

- La numărător scriem numărul (fără virgulă) și scădem numărul format până la perioadă;
- La numitor scriem numărul format din atâția de 9 câte cifre se găsesc în perioadă și atâția de zero câte cifre se găsesc între virgulă și perioadă;

TRANSFORMAREA FRACȚIILOR ORDINARE ÎN FRACȚII ZECIMALE

A) Transformarea fracțiilor ordinare cu numitori puteri a lui 10

- Numărăm câte zerouri apar la numitor (sau luăm exponentul puterii lui 10)
- Scriem numărătorul la rezultat
- Punem virgula, numărând de la dreapta spre stânga, peste atâtea cifre câte zerouri are numitorul

B) Transformarea fracțiilor ordinare de forma $\frac{a}{b}$

- Împărțim numărătorul la numitor (a împărțit la b)

RADICALI

<table>
<tr><td>$\sqrt{a} > 0, \quad a > 0$</td><td>$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{a^2} = |a|$</td><td>$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{0} = 0 \qquad \sqrt{1} = 1$</td><td>$a\sqrt{b} + c\sqrt{b} = (a+c)\sqrt{b}$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{a} = 1\sqrt{a}$</td><td rowspan="2">$a\sqrt{b} - c\sqrt{b} = (a-c)\sqrt{b}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Raționalizarea numitorilor
$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$, am amplificat fracția cu $\sqrt{b}$
$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$, am amplificat cu $\sqrt{b} - \sqrt{c}$
$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$, am amplificat cu $\sqrt{b} + \sqrt{c}$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad b \neq 0$</td></tr>
<tr><td></td><td>$(a\sqrt{b})^n = a^n\sqrt{b^n}$</td></tr>
<tr><td>Introducerea factorilor sub radical
$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$
$-a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 \cdot b}$</td><td rowspan="2">Radicali compuși
$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$
$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}$
$unde\ c = \sqrt{a^2 - b}$
$a, b \in N^*$</td></tr>
<tr><td>Scoaterea factorilor de sub radical
1) $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a|\sqrt{b}$
sau
2) - Descompunem numărul în factori primi
- Perechile ”ies” de sub radical (le înmulțim)
- Factorii care nu au pereche rămân sub radical (îi înmulțim)</td></tr>
</table>

OPERAȚII CU NUMERE REALE REPREZENTATE PRIN LITERE

Adunarea și scăderea

- Se poate efectua dacă termenii sunt asemenea (care au aceeași parte literală)
- Adunăm/scădem coeficienții termenilor iar partea literală rămâne neschimbată

Înmulțirea și împărțirea

- Se înmulțesc/împart coeficienții iar pentru partea literală folosim formulele $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (pentru înmulțire) respectiv $a^m : a^n = a^{m-n}$ (pentru împărțire)

Ridicarea la putere

Se ridică pe rând coeficienții și partea literală (folosim formulele $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ sau $a^1 = a,\ a^0 = 1$)

Formule de calcul prescurtat

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

Descompunerea:

1. **Scoaterea factorului comun** $ax + ay = a\,(x + y)$
2. **Formule de calcul prescurtat**

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$$

3. **Metoda combinată**
   a) **Scoatere de factor comun + formule de calcul prescurtat**
   b) **Gruparea termenilor** **Ex: Descompuneți** $x^2 - 5x + 6$
      - **Ne gândim la două numere întregi care înmulțite să dea +6 și adunate -5**
      - **Numerele sunt -2 și -3 Deci :** $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6$
      - **Grupăm termenii doi câte doi și scoatem factor comun: din primi doi pe x și din ultimi doi pe -3. Astfel obținem** $x(x-2) - 3(x-2)$
      - **Scoatem fator comun paranteza** $x - 2$ **și obținem** $(x-2)(x-3)$
   c) **Folosim formula** $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, **unde** x_1, x_2 **sunt soluțiile ecuației de gradul al II-lea** $ax^2 + bx + c = 0$

Simplificarea rapoartelor

- Descompunem numărătorul și numitorul (dacă se poate)
- Simplificăm raportul (cu numere, litere, paranteze)

Operații cu rapoarte de numere reale reprezentate prin litere

Adunarea/scăderea rapoartelor

a) **Cu același numitor:** adunăm/scădem numărătorii iar numitorul rămâne neschimbat
b) **Cu numitori diferiți:**

- Descompunem numitorii (dacă se pot)
- Aflăm numitorul comun (format din produsul de la c.m.m.m.c al coeficienților, literele și parantezele la puterea cea mai mare)
- Amplificăm rapoartele astfel încât să obținem numitorul comun
- Adunăm/scădem numărătorii iar numitorul comun rămâne neschimbat

Înmulțirea rapoartelor

- Descompunem numărătorii și numitorii (dacă se pot)
- Simplificăm rapoartele (dacă se pot)
- Înmulțim numărător cu numărător și numitor cu numitor

Împărțirea rapoartelor

- Împărțirea se transformă în înmulțire astfel: primul raport rămâne neschimbat iar al doilea se inversează
- Procedăm după regula înmulțirii rapoartelor

Ridicarea la putere a rapoartelor

- Se ridică la putere atât numărătorul cât și numitorul raportului

Obs.: Ridicăm la putere: semnul, coeficientul, literele și parantezele

Câteva enunțuri de la EXPRESII

Expresia E(x) are sens (este bine definită, există) :

- Punem condițiile: numitorii rapoartelor ≠ 0
  Obs.: 1. Dacă în expresie apare operația de împărțire, la condiții se pune și numărătorul (de la împărțitor) diferit de zero
  2. Dacă avem în expresie $\sqrt{a}$, condiția este $a \geq 0$
- Rezolvăm ecuațiile (inecuațiile) și aflăm valorile lui x
- x ∈ R/{$toate\ valorile\ lui\ x\ aflate\ anterior$}

Expresia E(x) NU are sens (nu este bine definită, nu există) :

- Punem condițiile: numitorii rapoartelor =0
  Obs.: 1. Dacă în expresie apare operația de împărțire, la condiții se pune și numărătorul (de la împărțitor) egal cu zero.
  2. Dacă avem în expresie $\sqrt{a}$, condiția este $a < 0$
- Rezolvăm ecuațiile (inecuațiile) și aflăm valorile lui x
- $x \in \{toate\ valorile\ lui\ x\ aflate\ anterior\}$

Aduceți expresia la forma cea mai simplă sau arătați că E(x)=...

- Efectuăm toate operațiile din expresie respectând ordinea efectuării operațiilor

Calculați E(a), (unde a este număr real cunoscut)

- Înlocuim în expresia dată x cu numărul real a **Ex:** Calculați E(-1). Vom înlocui x cu -1

Rezolvați ecuația E(x)=a , (unde a număr real cunoscut)

- Aducem expresia la forma cea mai simplă
- Rezolvăm ecuația E(x) = a și aflăm valorile lui x
- Scriem soluția ecuației ținând cont de condițiile de existență ale lui x

Determinați numerele n cu proprietatea E(n)≥a , (unde a număr real cunoscut)

- Aducem expresia la forma cea mai simplă
- Formăm E(n), înlocuind x cu n
- Rezolvăm inecuația E(n)≥a și aflăm valorile lui n
- Scriem soluția inecuației ținând cont de condițiile de existență ale lui n

Determinați numerele întregi (naturale) n pentru care E(n) este număr întreg (natural)

- Aducem expresia la forma cea mai simplă
- Formăm E(n), înlocuind x cu n
- **Ex 1:** Determinați n număr natural pentru care $E(n) = \frac{2}{n+1} \in Z$

$$E(n) = \frac{2}{n+1} \in Z \Rightarrow 2 \vdots (n+1) \Rightarrow n+1 \in D_2 = \{\pm 1; \pm 2\}$$

Egalăm n+1 cu fiecare divizor, rezolvăm ecuațiile și aflăm numărul natural n.

- **Ex 2:** Determinați numărul întreg n pentru care $E(n) = \frac{n+2}{2n+3} \in Z$

  $E(n) = \frac{n+2}{2n+3} \in Z \Rightarrow (n+2) \vdots (2n+3)$ (1)

  Folosim proprietățile relației de divizibilitate :

  $(2n+3) \vdots (2n+3)$ (2)

  Înmulțim relația (1) cu numărul 2 și obținem $(2n+4) \vdots (2n+3)$ (3)

  Efectuăm (3) - (2) și obținem $1 \vdots (2n+3)$

  Rezolvăm după modelul de la Ex. 1

Demonstrează că E(n) este *divizibil cu a* (a număr dat), *multiplu de a* pentru orice număr natural n

- Aducem expresia la forma cea mai simplă
- Formăm E(n), înlocuind x cu n
- Pentru a rezolva cerința problemei folosim criteriile de divizibilitate (dacă numărul dat nu are criteriu de divizibilitate, îl scriem sub formă de produs de două sau mai multe numere)

Demonstrează că E(n) este număr *natural par (impar)* sau *pătrat perfect*

- Aducem expresia la forma cea mai simplă
- Formăm E(n), înlocuind x cu n
- Transformăm E(n) în $2\cdot(\dots)$, (scoatem factor comun pe 2) sau în produs de două numere consecutive pentru *numere pare* sau

  $2\cdot(\dots)+1$ pentru *numere impare* sau

  $(\dots)^2$ pentru *pătrat perfect*

ECUAȚII ȘI INECUAȚII

Ecuații de gradul I

$x + a = b$ $x = b - a$ $S = \{b - a\}$	D – S = Dif		$x \cdot a = b$ $x = b : a$ $S = \{b : a\}$	D : Î = C	
	D = Dif + S $S = \{\text{Dif} + S\}$	S = D - Dif $S = \{D - \text{Dif}\}$		D = C · Î $S = \{C \cdot Î\}$	Î = D : C $S = \{D : C\}$

$\lvert x\rvert = a, \quad a \in R$			$\lvert x\rvert \leq a, \quad a \in R_+$	$\lvert x\rvert \geq a, \quad a \in R$
$a > 0 \Longrightarrow$ x=a sau x=-a S={a; −a}	$a = 0 \Longrightarrow$ x=0 S=0	$a < 0$ S=ϕ	$-a \leq x \leq a$ $S=[-a; a]$	$x \geq a \; sau \; x \leq -a$ $S = (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$

$\lvert x\rvert = \lvert y\rvert \Longrightarrow x = \pm y$ Rezolvăm cele două ecuații: x = y și x = -y

Cum rezolvăm o ecuație?

- Dacă ecuația conține și fracții ordinare aducem fracțiile la același numitor, iar apoi eliminăm numitorul prin înmulțirea ecuației cu numitorul comun (copiem numărătorii și îi punem în paranteză)
- Dacă avem paranteze, desfacem parantezele prin înmulțirea fiecărui termen din paranteză cu numărul sau semnul din fața parantezei
- Separăm termenii astfel: termenii care conțin necunoscuta în membrul stâng al ecuației iar termenii liberi (termeni fără parte literală) în membrul drept. Trecerea termenilor dintr-un membru în altul se face cu semn schimbat.
- Efectuăm calculele
- Împărțim ambii membri cu coeficientul necunoscutei
- Aflăm necunoscuta
- Scriem soluția ținând cont de datele problemei

Inecuații de gradul I

Inecuațiile se rezolvă ca și ecuațiile. Semnul inecuației se schimbă, ori de câte ori, pe parcursul rezolvării înmulțim sau împărțim inecuația cu un număr negativ.

Ecuații de gradul II

Forma completă:

$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \neq 0$

Scriem coeficienții: a, b, c

Calculăm $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	
$S = \{x_1, x_2\}$	$S = \{x_1\}$	$S = \phi$ (*mulțimea vidă*)

Obs.: Dacă $\Delta > 0$ **ecuația are două soluții reale distincte**

$\Delta = 0$ **ecuația are o soluție reală (sau două soluții egale)**

$\Delta < 0$ **ecuația nu are soluții reale**

Forme incomplete:

Dacă c=0 $\Rightarrow ax^2 + bx = 0, \ a, b \neq 0$

Rezolvare:

1. Scoatem factor comun pe x
   $x(ax + b) = 0$
2. Rezolvăm ecuațiile
   $x = 0$ sau $ax + b = 0$
   $x = -\frac{b}{a}$

$S = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$

Dacă b=0 $\Rightarrow ax^2 + c = 0, \ a, c \neq 0$

Rezolvare:

1. Separăm temenii $ax^2 = -c$
2. $x^2 = -\frac{c}{a}$

Dacă $-\frac{c}{a} > 0$	Dacă $-\frac{c}{a} < 0$
$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	
$S = \{x_1, x_2\}$	$S = \phi$ (*mulțimea vidă*)

Ecuația de forma $x^2 = a$

a > 0	**a = 0**	**a < 0**
$x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$	$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$	
$S = \{\pm\sqrt{a}\}$	$S = \{0\}$	$S = \emptyset$

Ecuațiile echivalente sunt ecuațiile care au soluțiile egale.

SISTEME DE ECUAȚII

$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$, x, y necunoscutele

Metoda reducerii

Ex. : $\begin{cases} 2x + 3y = -8 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$

- Dacă prin adunarea celor două ecuații nu se reduce nicio necunoscută se înmulțesc cele două ecuații (sau după caz doar una) astfel încât prin adunarea ecuațiilor obținute o necunoscută se reduce.
  Înmulțim a doua ecuație cu -2.
  Adunăm cele două ecuații și obținem 7y = -28
- Se rezolvă ecuația obținută și aflăm o necunoscută
  y = -4
- Înlocuim valoarea obținută în una din ecuațiile sistemului dat și se determină cealaltă necunoscută
  Înlocuim în a doua ecuație y cu -4 și obținem ecuația x + 8 = 10. Obținem x = 2
- Scriem soluția sistemului $S = \{(x; y)\}$
  $S = \{(2; -4)\}$

Metoda substituției

Ex. : $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$

- Aflăm una din necunoscute în funcție de cealaltă. De exemplu îl aflăm pe x din prima ecuație în funcție de y
  Din ecuația $2x + 3y = 6 \Longrightarrow 2x = 6 - 3y \Longrightarrow x = \frac{6-3y}{2}$
- Înlocuim x aflat anterior în a doua ecuație
  Înlocuim $x = \frac{6-3y}{2}$ *în ecuația 4x - 2y = 4*
  $4 \cdot \frac{6-3y}{2} - 2y = 4$
- Rezolvăm ecuația obținută și îl aflăm pe y
  y=1
- Valoarea lui y o înlocuim în una din ecuațiile sistemului (sau în $x = \frac{6-3y}{2}$) și îl aflăm pe x
  $x = \frac{6-3\cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$
- Scriem soluția sistemului $S = \{(x; y)\}$
  $S = \left\{\left(\frac{3}{2}; 1\right)\right\}$

FUNCȚII

$f : A \to B$, $f(x) = y$

A - Domeniul (domeniu de definiție)

B - Codomeniul (domeniu de valori)

f(x) = y legea de corespondență

Imaginea funcției **Im f** $= \{y \in B \,/\, y = f(x), x \in A\}$

Graficul funcției $G_f = \{(x, f(x)) \,/\, x \in A\}$

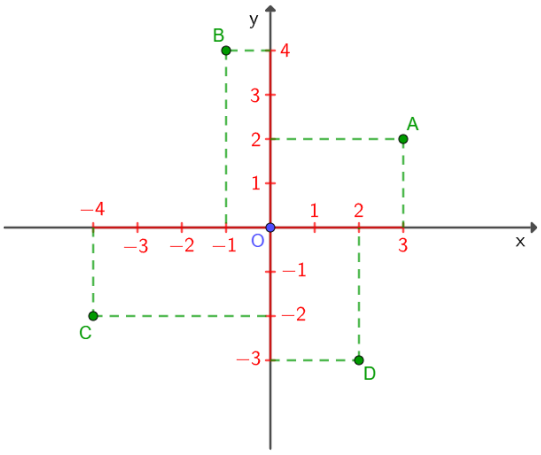
Funcții egale **f:A→B și g:C→D egale dacă: A=C, B=D și f(x)=g(x)**

Punct situat pe graficul funcției f

M(a,b)$\in G_f \Leftrightarrow f(a) = b$**, unde a ∈ Domeniu și b ∈ Codomeniu**

Sistemul de axe ortogonale XOY
OX, OY axe de coordonate
Axa OX – axa absciselor
Axa OY – axa ordonatelor

A(a, b) - punctul A de coordonate a și b
a - abscisă **b - ordonată**
Ex: A(3, 2)
- abscisa = 3
- ordonata = 2



Fie $A(x_A, y_A)$ $și$ $B(x_B, y_B)$

Distanța dintre punctele A și B
Lungimea segmentului AB

AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Coordonatele mijlocului M a segmentului AB

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ și $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

Reprezentarea grafică (geometrică în sistemul XOY) a funcției $f : D \to R$, $f(x) = ax + b$ sau $f(x) = y$

D mulțime finită de numere

- Calculăm f(a) unde a ∈D (se calculează pentru toate elementele din domeniu)
- Reprezentăm punctele în sistemul de axe XOY
- Reprezentarea grafică este o mulțime finită de puncte

D interval mărginit [a, b], [a, b), (a, b] sau (a, b)

- Calculăm f(a), f(b) și aflăm coordonatele punctelor A și B, unde A(a, f(a)), B(b, f(b))
- Reprezentăm în sistemul de axe XOY
- Reprezentarea grafică este un segment (sg. AB)

D interval nemărginit [a, ∞), (a, ∞), (-∞, a] sau (-∞, a)

- Calculăm f(a), f(b) unde b o valoare din interval și aflăm coordonatele punctelor A și B
- Reprezentăm în sistemul de axe XOY
- Reprezentarea grafică este o semidreaptă (semidreapta AB cu originea în A)

D = R

- Aflăm coordonatele punctului A = $G_f \cap OX$ A(x, 0)
- Aflăm coordonatele punctului B = $G_f \cap OY$ B(0, y)
- Reprezentăm punctele A și B în sistemul de axe
- Reprezentarea grafică este dreapta AB

  Obs.:

  Dacă b = 0 $\Longrightarrow$ f(x) = ax iar graficul funcției este o dreaptă care trece prin originea sistemului

  Dacă a = 0 $\Longrightarrow$ f(x) = b (funcția constantă) iar graficul funcției este o dreaptă care este paralelă cu axa Ox

Funcția de forma f : R → R , f(x) = ax + b, a,b ∈ R sau f(x) = y

Coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției cu axele de coordonate

- A = $G_f \cap OX = \begin{cases} y = 0 \\ Rezolvăm\ ecuația\ f(x) = 0\ și\ aflăm\ x \end{cases} \Longrightarrow A(x, 0)$

- B = $G_f \cap OY = \begin{cases} x = 0 \\ Calculăm\ f(0)\ și\ aflăm\ y \end{cases} \Longrightarrow B(0, y)$

Aria, perimetrul triunghiului determinat de G_f, OX și OY

Distanța de la originea sistemului la G_f

Unghiul determinat de G_f și OX sau de G_f și OY

- Aflăm coordonatele punctului A = $G_f \cap OX$ A(x, 0)
- Aflăm coordonatele punctului B = $G_f \cap OY$ B(0, y)
- Reprezentăm punctele A și B în sistemul de axe și trasăm G_f
- Calculăm OA = $|x|$ și OB = $|y|$, care sunt catetele ΔAOB dreptunghic în O
  1. Aria = $\frac{c_1 \cdot c_2}{2}$
  2. Perimetrul = AO + BO + AB (AB se calculează cu Teorema lui Pitagora)

3. d(O, G_f) calculăm cu h=$\frac{c_1 \cdot c_2}{ip}$ sau cu funcții trigonometrice
4. Calculăm măsura unghiului cu funcții trigonometrice

Coordonatele punctului de intersecție a graficelor două funcții f, g:R→R

Fie P = $G_f \cap G_g$

- Rezolvăm ecuația f(x) = g(x) și aflăm x (prima coordonată a lui P)
- Înlocuim valoarea lui x în f(x) sau g(x) (a doua coordonată a lui P)

Determinarea funcției f:R→R, f(x) = ax + b, a, b∈ R care conține punctele A(c, d) și B(m, n)

- A(c, d)∈ $G_f \Leftrightarrow f(c) = d$ (1)
- B(m, n)∈ $G_f \Leftrightarrow f(m) = n$ (2)
- Rezolvăm sistemul format din ecuațiile (1) și (2) și aflăm a și b
- Înlocuim valorile lui a și b în f(x)

A,B,C puncte coliniare

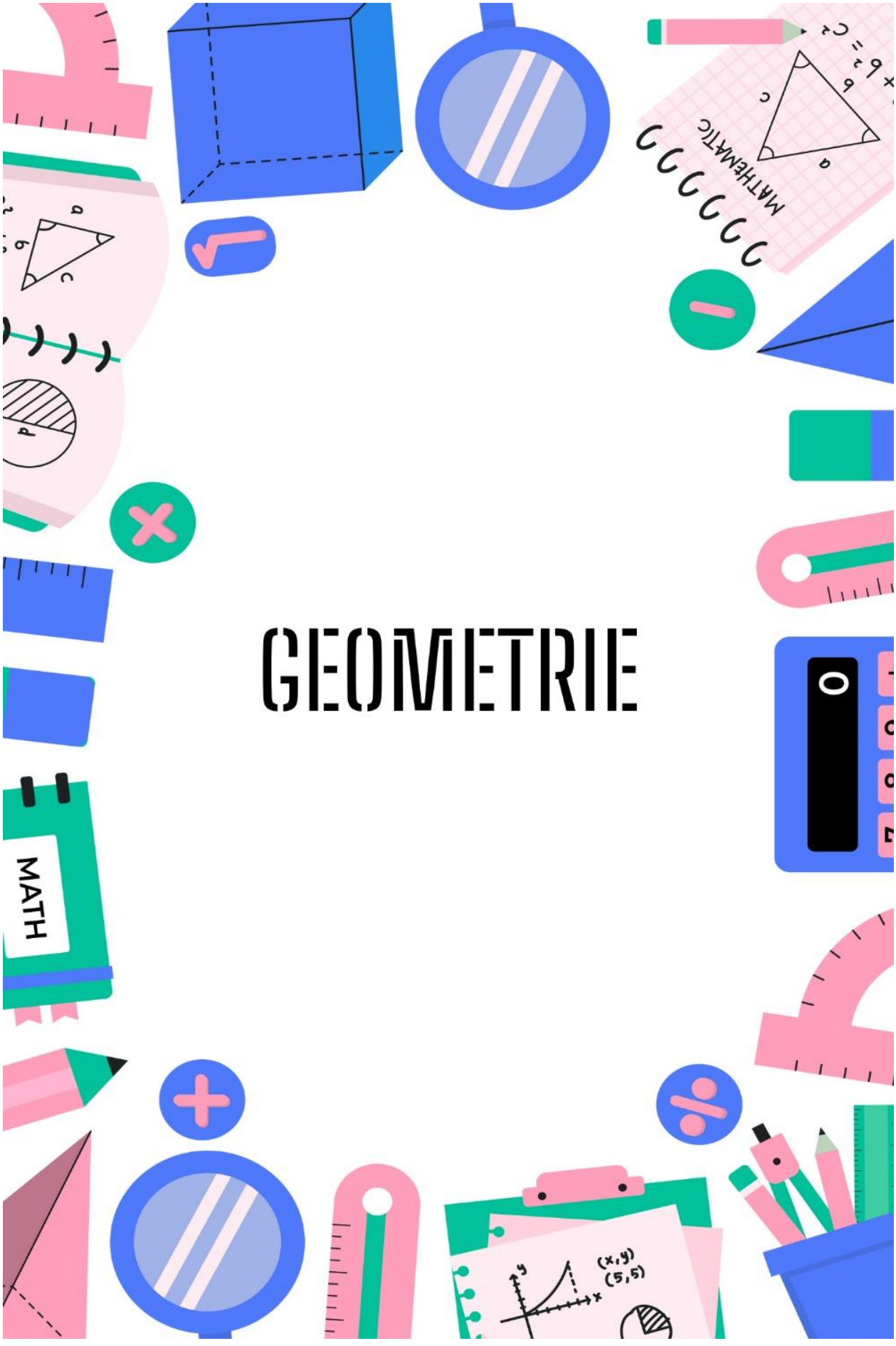
- Determinăm funcția f:R→R , f(x) = ax + b, a, b∈ R care conține două din punctele date (ex. A și B)
- Verificăm dacă cel de-al treilea punct (C) aparține G_f
- Dacă C ∈ G_f⇒ A, B, C coliniare

G_f, G_g, G_h drepte concurente (unde f,g,h:R→R)

- Aflăm coordonatele punctului de intersecție a graficelor două funcții (de ex. P = $G_f \cap G_g$)
- Verificăm dacă P ∈ G_h
- Dacă P ∈ G_h dreptele sunt concurente

Reprezentările grafice a funcțiilor f și g sunt perpendiculare

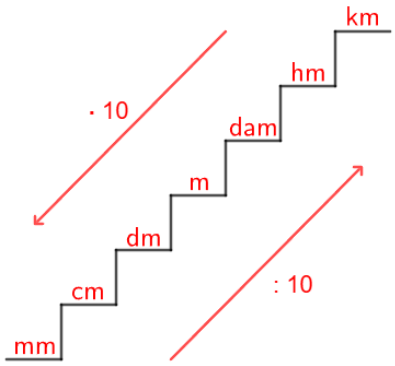
- Aflăm coordonatele punctului de intersecție ale graficelor funcțiilor (notăm punctul cu A)
- Alegem punctele B ∈ G_f și C ∈ G_g, (ex. Calculăm f(1) și g(2))
- Calculăm AB, AC, BC cu formula distanței dintre două puncte
- Verificăm cu R.T.P. dacă ΔABC este dreptunghic ⇒ AB⊥AC



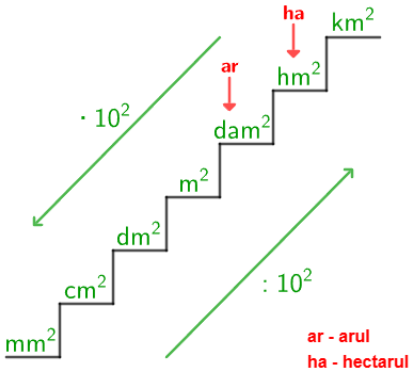
GEOMETRIE

UNITĂȚI DE MĂSURĂ

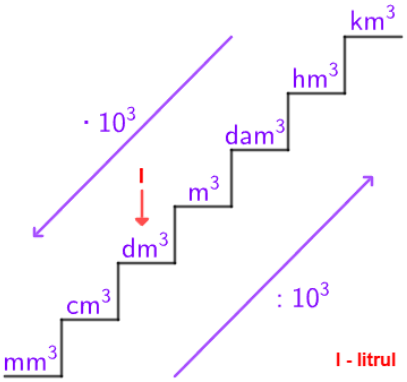
Lungime



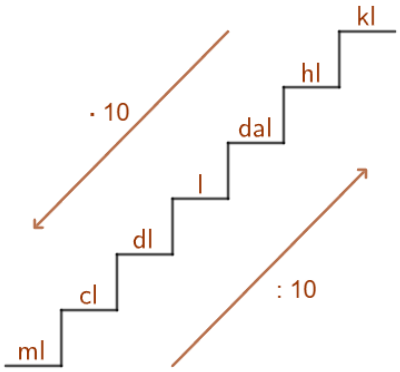
Suprafață (arie)



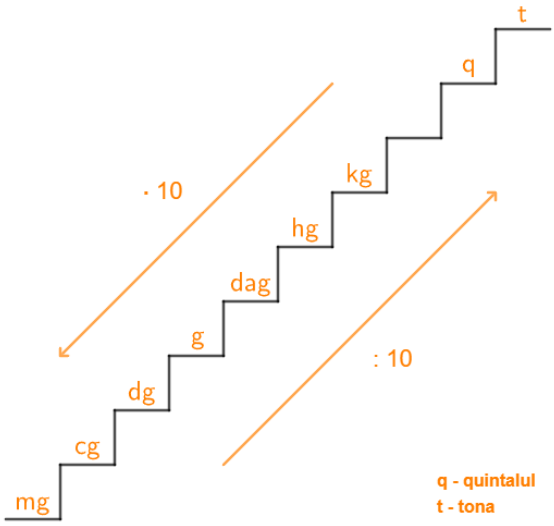
Volum



Capacitate



Masă



Timp

1min = 60 s
1oră = 60 min
1 zi = 24 ore
1 lună = 28 (29); 30 sau 31 zile
1 an = 365 zile sau 366 zile (în anii bisecți, din 4 în 4 ani)
1 an = 12 luni
1 deceniu = 10 ani
1 secol = 100 ani
1 mileniu = 1000 ani

PUNCT. DREAPTĂ. PLAN

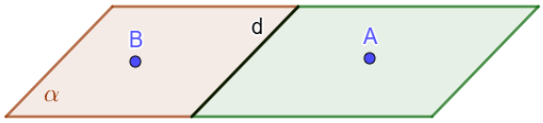
Punctul P
Punctele se notează cu litere mari

Dreapta a sau AB

Semidreapta [AB
A originea semidreptei

Segmentul [AB]
A,B extremitățile segmentului

Planul α



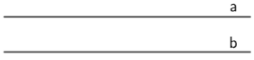
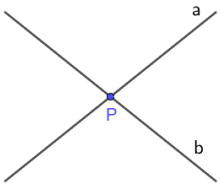
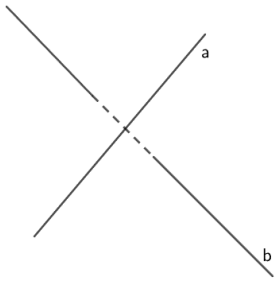
Semiplanul determinat de dreapta d și punctul A (d,A
Semiplanul determinat de dreapta d și punctul B (d,B

Poziția unui punct față de o dreaptă

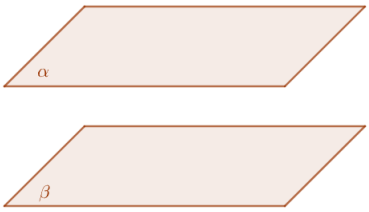
$A \in a$ Punctul A aparține dreptei a

$A \notin a$ Punctul A nu aparține dreptei a

Poziția a două drepte în spațiu

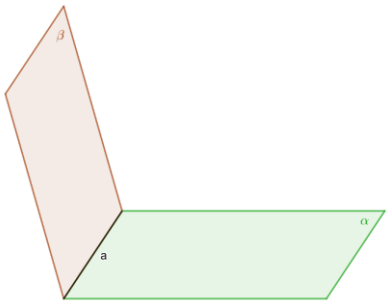
Coplanare			Necoplanare
 **Drepte paralele** $a \parallel b$	 **Drepte concurente** (secante) $a \cap b = \{P\}$	**Confundate** a=b	 $a \nparallel b$ $a \cap b = \emptyset$

Poziția a două plane



Plane paralele

$\alpha \parallel \beta$



Plane secante

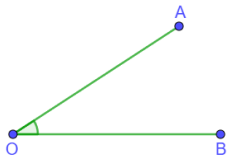
$\alpha \cap \beta = a$

Plane confundate

$\alpha = \beta$

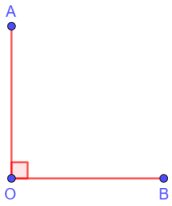
UNGHIURI

Ascuțit



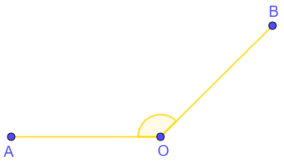
$0^0 < \sphericalangle AOB < 90^0$

Drept



$\sphericalangle AOB = 90^0$

Obtuz



$90^0 < \sphericalangle AOB < 180^0$

Alungit

$\sphericalangle AOB = 180^0$

Nul

$\sphericalangle AOB = 0^0$

Unghiuri complementare

Două unghiuri cu suma măsurilor lor de 90^0.
Complementul $\sphericalangle x = 90^0 - x$

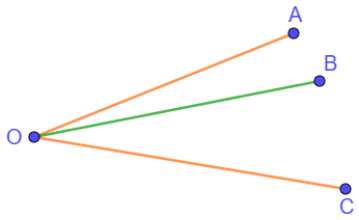
Unghiuri suplementare

Două unghiuri cu suma măsurilor lor de 180^0
Suplementul $\sphericalangle x = 180^0 - x$

Unghiuri adiacente

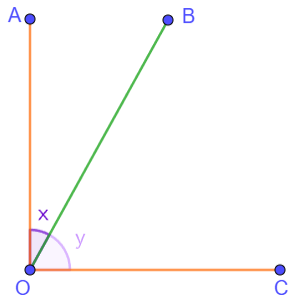
Două unghiuri care au:

- vârf comun O
- latură comună [OB
- celelalte două laturi, [OA și [OC, de o parte și de alta a laturii comune [OB



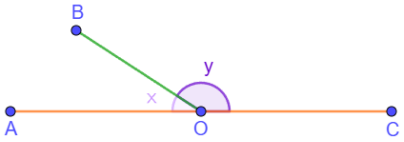
$\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC$

Unghiuri adiacente complementare



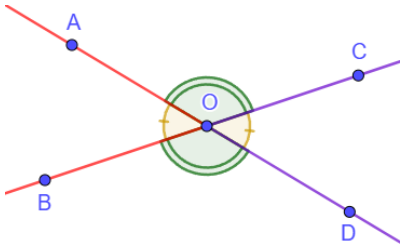
$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 90^0$

Unghiuri adiacente suplementare



$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 180^0$

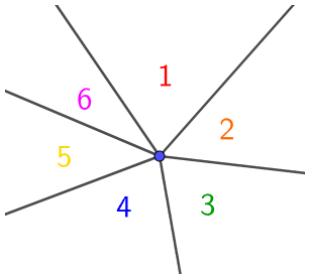
Unghiuri opuse la vârf



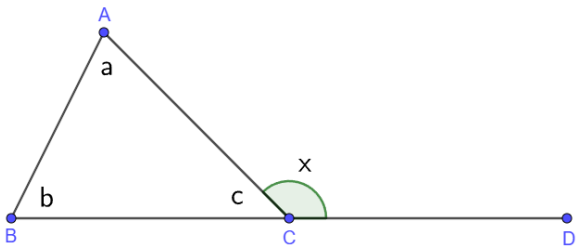
$\sphericalangle AOB, \sphericalangle COD$ *o.v.* $\Rightarrow \sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$

$\sphericalangle AOC, \sphericalangle BOD$ *o.v.* $\Rightarrow \sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$

Unghiuri în jurul unui punct



$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 + \sphericalangle 6 = 360^0$



Unghi exterior unui triunghi

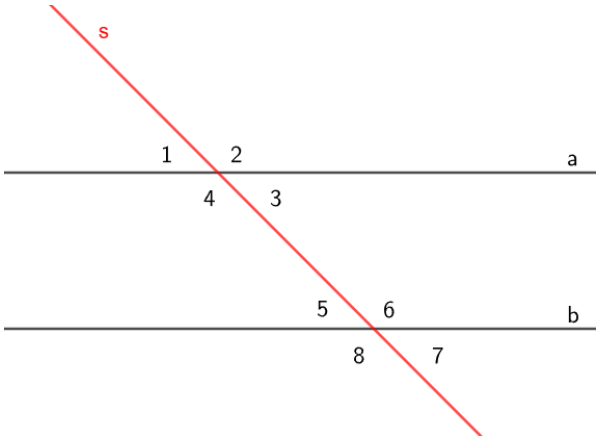
Este unghiul format de o latură a triunghiului cu prelungirea altei laturi a acestuia.

x- unghiul exterior

$x = 180^0 - c$

$x = a + b$

UNGHIURI FORMATE DE
DOUĂ DREPTE PARALELE CU O SECANTĂ

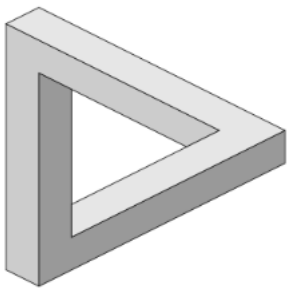


Dacă $\left.\begin{matrix} a \parallel b \\ s\ secantă \end{matrix}\right\}$ **⇒unghiurile:**

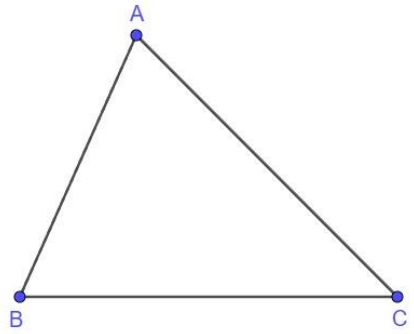
- **Alterne interne sunt congruente**
  $\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 6$
  $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 5$
- **Alterne externe sunt congruente**
  $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 8$
  $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 7$
- **Corespondente sunt congruente**
  $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 5$
  $\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 8$
  $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 6$
  $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 7$
- **Interne de aceeași parte a secantei sunt suplementare**
  $\sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 = 180^0$
  $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 6 = 180^0$
- **Externe de aceeași parte a secantei sunt suplementare**
  $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 8 = 180^0$
  $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 7 = 180^0$

Obs.: **Dacă una din relațiile de mai sus este adevărată atunci dreptele sunt paralele.**

Ex: Dacă $\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 6$ (alterne interne) ⇒ a||b



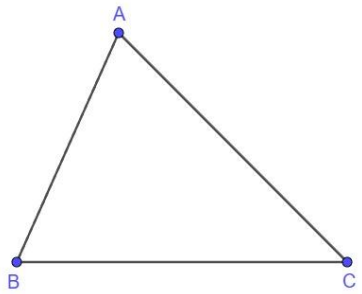
TRIUNGHIUL



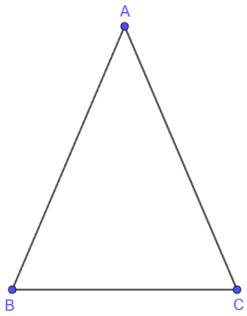
ΔABC triunghiul ABC
Laturi AB, AC, BC
Vârfuri A,B,C
Unghiuri $\sphericalangle ABC, \sphericalangle BAC, \sphericalangle ACB \; sau \; \sphericalangle B, \sphericalangle A, \sphericalangle C$
Unghiul opus laturii AB este $\measuredangle C$
Unghiurile alăturate laturii AB sunt $\measuredangle A$ *şi* $\measuredangle B$
Latura opusă $\measuredangle$ A este BC
Laturile alăturate $\measuredangle$ A sunt AB și AC

Clasificarea triunghiurilor

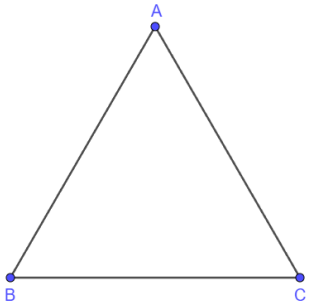
a. După laturi



Oarecare (scalen)
$AB \neq AC \neq BC$

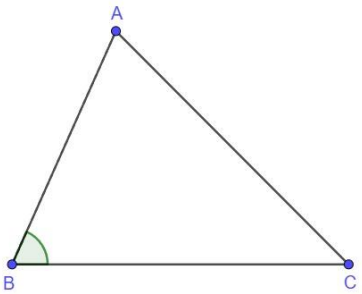


Isoscel
AB = AC
BC baza triunghiului

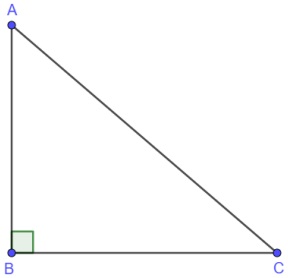


Echilateral
AB = AC = BC

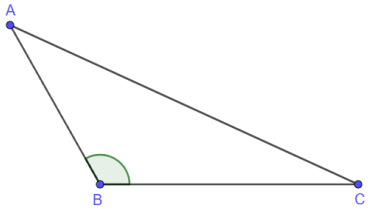
b. După unghiuri



Ascuțitunghic
$\measuredangle A, \measuredangle B, \measuredangle C < 90^0$

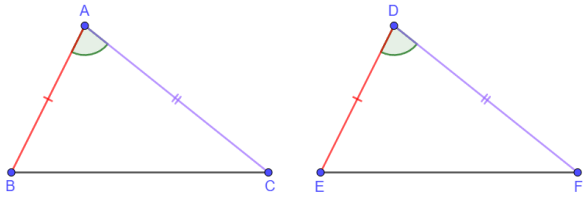
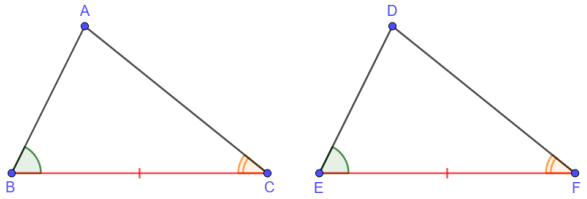
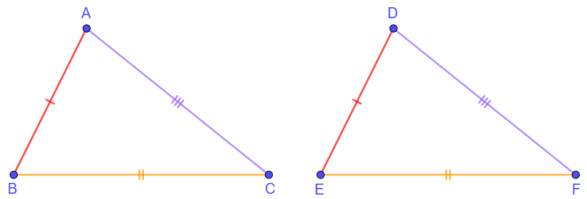
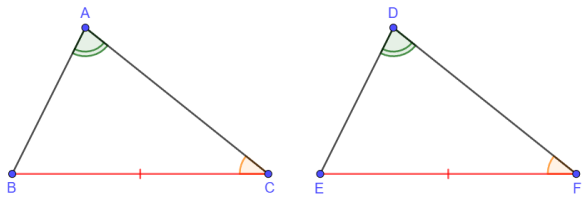


Dreptunghic
$\measuredangle B = 90^0$



Obtuzunghic
$\measuredangle B > 90^0$

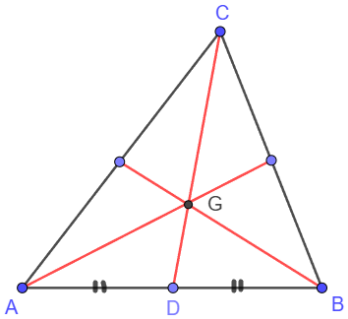
CRITERII DE CONGRUENȚĂ A TRIUNGHIURILOR

L.U.L. (latură, unghi, latură) 	Două triunghiuri care au două laturi și unghiul determinat de ele, respectiv congruente, sunt congruente. $\left.\begin{matrix} AB = DE \\ \measuredangle A \equiv \measuredangle D \\ AC = DF \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$
U.L.U. (unghi, latură, unghi) 	Două triunghiuri care au o latură și unghiurile alăturate ei, respectiv congruente, sunt congruente. $\left.\begin{matrix} \measuredangle B \equiv \measuredangle E \\ BC = EF \\ \measuredangle C \equiv \measuredangle F \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$
L.L.L. (latură, latură, latură) 	Două triunghiuri care au laturile, respectiv, congruente sunt congruente. $\left.\begin{matrix} AB = DE \\ BC = EF \\ AC = DF \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$
L.U.U. (latură, unghi, unghi) 	Două triunghiuri care au câte o latură, câte un unghi alăturat laturii și câte un unghi opus laturii, respectiv congruente, sunt congruente. $\left.\begin{matrix} BC = EF \\ \measuredangle A \equiv \measuredangle D \\ \measuredangle C \equiv \measuredangle F \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$

LINII IMPORTANTE ÎN TRIUNGHI

MEDIANA

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC \\ CD \text{ mediană}\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow D \text{ mij.}[AB]$$



G centrul de greutate = intersecția medianelor unui triunghi

G centrul de greutate $\Rightarrow CG = \frac{2}{3} \cdot CD$

$$DG = \frac{1}{3} \cdot CD$$

Cum demonstrăm că G este centrul de greutate?

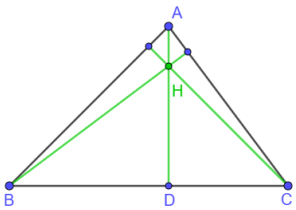
1. Demonstrăm punctul G intersecția a două mediane
2. Demonstrăm CD mediană și $CG = \frac{2}{3} \cdot CD$ sau

$$DG = \frac{1}{3} \cdot CD$$

Cum demonstrăm că CD este mediană în triunghiul ABC?

1. Demonstrăm D mijlocul segmentului AB
2. Demonstrăm G centrul de greutate și G∈CD
3. Demonstrăm că este înălțimea sau bisectoarea corespunzătoare bazei unui triunghi isoscel (echilateral)

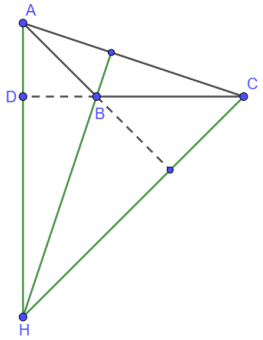
ÎNĂLȚIMEA



ΔABC **ascuțitunghic**
H∈ *Int* ΔABC

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC \\ AD \text{ înălțime}\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow AD \perp BC$$

H – ortocentrul triunghiului = intersecția înălțimilor unui triunghi



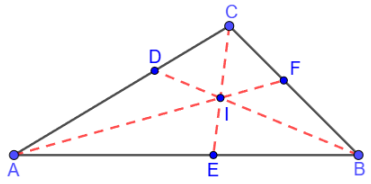
ΔABC **obtuzunghic**
H∈ *Ext* ΔABC

Cum demonstrăm că AD este înălțime în triunghiul ABC?

1. Demonstrăm AD perpendiculară pe BC
2. Demonstrăm H ortocentrul triunghiului și H∈AD
3. Demonstrăm că este bisectoarea sau mediana corespunzătoare bazei unui triunghi isoscel (echilateral)

BISECTOAREA

$$\boldsymbol{AF\ bis \sphericalangle BAC \Leftrightarrow \sphericalangle BAF \equiv \sphericalangle FAC}$$

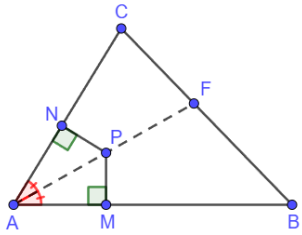


I – centrul cercului înscris în triunghi = intersecția bisectoarelor unghiurilor unui triunghi

Proprietatea bisectoarei unui unghi

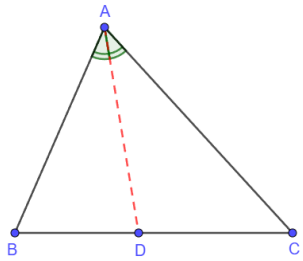
$$\left.\begin{matrix}[AF\ bis. \sphericalangle BAC \\ P \in [AF\end{matrix}\right\} \Rightarrow d(P,AC) = d(P,AB) \text{ (fig. 2)}$$

PN=PM



Cum demonstrăm că [AF este bisectoarea unghiului BAC?

1. Demonstrăm $\sphericalangle CAF \equiv \sphericalangle BAF$
2. Demonstrăm I centrul cercului înscris în triunghi și I∈[AF
3. Demonstrăm $d(P,AC) = d(P,AB)$ (dem. PN=PM) și $P \in [AF$ (fig. 2)
4. Demonstrăm că este înălțimea sau mediana corespunzătoare bazei unui triunghi isoscel (echilateral)

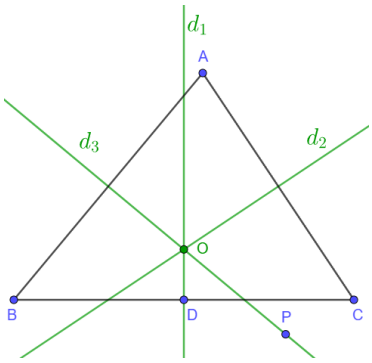


Teorema bisectoarei într-un triunghi

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC \\ [AD\ bis. \sphericalangle BAC\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \text{ (fig. 3)}$$

MEDIATOAREA

$$\boldsymbol{d_1\ mediatoarea\ [BC] \Leftrightarrow d_1 \perp BC \text{ și } D\ mij\ BC}$$



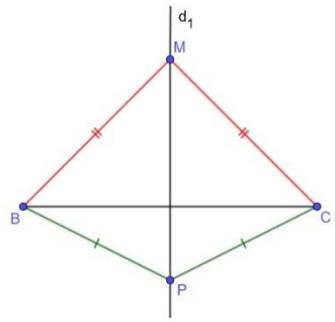
O - centrul cercului circumscris triunghiului = intersecția mediatoarelor într-un triunghi

Proprietatea punctelor situate pe mediatoarea unui segment

$$\left.\begin{matrix}\boldsymbol{P \in d_3} \\ \boldsymbol{d_3\ mediatoarea\ [AB]}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{[PA] \equiv [PB]}$$

Cum demonstrăm că d_1 este mediatoarea segmentului BC?

1. Demonstrăm $d_1 \perp BC$ și $D\ mij\ BC$ unde $\{D\} = d_1 \cap BC$
2. Demonstrăm O centrul cercului circumscris triunghiului și O∈ d_1, $D\ mij\ BC$, unde $\{D\} = d_1 \cap BC$
3. Demonstrăm că este bisectoarea (înălțimea, mediana) corespunzătoare bazei unui triunghi isoscel (echilateral)
4. Demonstrăm că două puncte sunt echidistante față de extremitățile segmentului MB=MC și PB=PC (fig. 2)



PROPRIETĂȚILE TRIUNGHIULUI ISOSCEL

Într-un triunghi isoscel:

1.Două laturi sunt congruente.

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC\ is.\\ BC\ bază\end{matrix}\right\} \Rightarrow [AB] \equiv [AC]$$

2. Unghiurile alăturate bazei sunt congruente.

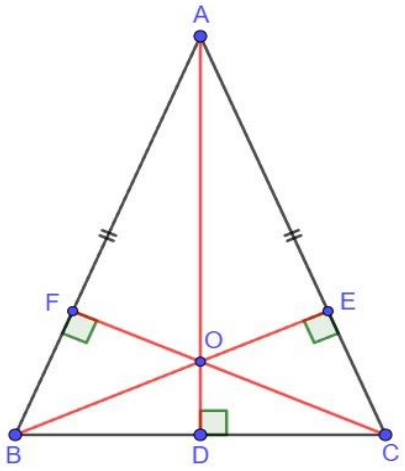
$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC\ is.\\ BC\ bază\end{matrix}\right\} \Rightarrow \sphericalangle B = \sphericalangle C$$

3. Înălțimea corespunzătoare bazei este: bisectoare, mediană, mediatoare.

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC\ is.\\ BC\ bază\\ AD\ h\end{matrix}\right\} \Rightarrow AD\ bis, med., mediatoare$$

4. Înălțimile duse din vârfurile corespunzătoare bazei sunt congruente.

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC\ is.\\ BC\ bază\\ BE, CF\ h\end{matrix}\right\} \Rightarrow BE = CF$$



***BC* - bază**

Obs.: Proprietățile 3 și 4 sunt adevărate și pentru bisectoare sau mediane.

Cum demonstrăm că un triunghi este isoscel?

Un triunghi este isoscel dacă este îndeplinită una din afirmațiile :

1. **Are două laturi egale**

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC\\ AB = AC\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \text{ - isoscel}$$

2. **Are două unghiuri egale**

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC\\ \angle B = \angle C\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \text{ - isoscel}$$

3. **Două linii importante coincid**

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC\\ AD bis.\\ AD\ med.\end{matrix}\right\} => \Delta ABC \text{ - isoscel}$$

4. **Două înălțimi sunt egale**

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC\\ BE, CF\ h\\ BE = CF\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \text{ - isoscel}$$

Obs.: Afirmația 4 este adevărată și pentru bisectoare sau mediane

PROPRIETĂȚILE TRIUNGHIULUI ECHILATERAL

Într-un triunghi echilateral:

1. **Toate laturile sunt congruente:**

$$\Delta ABC\ echil. \Rightarrow AB = AC = BC$$

2. **Toate unghiurile sunt congruente și au măsura de 60°**

$$\Delta ABC\ echil. \Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = 60°$$

3. **Înălțimea dusă din oricare vârf este și bisectoare, mediană și mediatoare (ele sunt egale)**

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC\ echil.\\ AE, BF, CD\ h\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AE, BF, CD\ bis., mediane, mediatoare$$

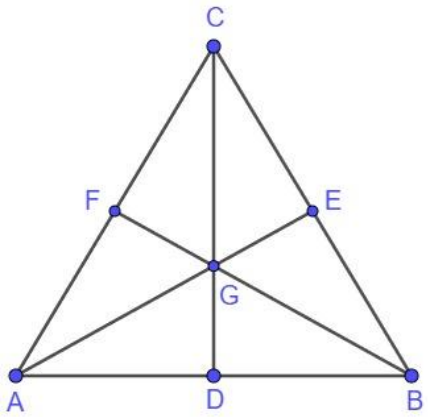
AE = BF = CD

4. **Ortocentrul triunghiului este și centrul de greutate, centrul cercului înscris în triunghi, centrul cercului circumscris triunghiului.**

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC\ echil.\\ G\ ortocentrul\ \Delta\end{matrix}\right\} \Rightarrow G\ centrul\ de\ greutate,$$

$$centrul\ cercului\ înscris\ în\ triunghi,$$

$$centrul\ cercului\ circumscris\ triunghiului$$



Cum demonstrăm că un triunghi este echilateral?

Un triunghi este echilateral dacă este îndeplinită una din afirmațiile :

1. **Toate laturile sunt congruente.**

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC\\ AB = AC = BC\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC\ echilateral$$

2. **Toate unghiurile sunt congruente**

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC\\ \angle A = \angle B = \angle C\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC\ echilateral$$

3. **Două unghiuri ale triunghiului are fiecare măsura de 60°.**

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC\\ \angle A = \angle B = 60^0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC\ echilateral$$

4. **Două înălțimi sunt și bisectoare, mediane sau mediatoare.**

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC\\ AE\ h, bis.\\ \text{BF h. bis.}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC\ echilateral$$

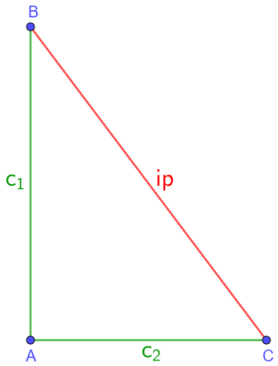
5. **Ortocentrul triunghiului este centrul de greutate sau centrul cercului înscris în triunghi sau centrul cercului circumscris triunghiului .**

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC\\ G\ ortocentrul\ tr. și\ centrul\ de\ greutate\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC\ echilateral$$

6. **Un triunghi isoscel cu un unghi de 60°**

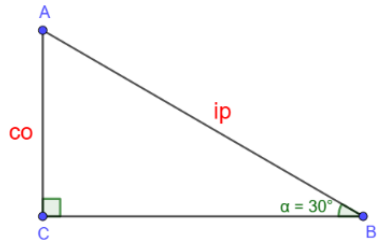
$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC\ isoscel\\ \angle A = 60^0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC\ echilateral$$

PROPRIETĂȚILE TRIUNGHIULUI DREPTUNGHIC



Teorema lui Pitagora: Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei = suma pătratelor lungimilor catetelor.

$$\Delta \textbf{ drept.}\} \xRightarrow{\textbf{T Pitagora}} \textbf{ip}^2 = \textbf{c}_1{}^2 + \textbf{c}_2{}^2$$

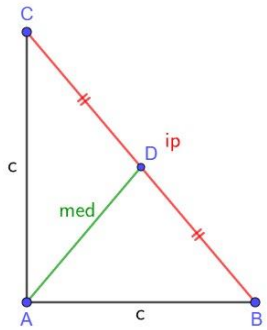


Teorema ∠30°: Dacă un triunghi dreptunghic are un unghi de 30°, atunci cateta opusă acestui unghi este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei

$$\left.\begin{matrix}\Delta \textbf{ dreptunghic} \\ \sphericalangle \mathbf{30^0}\end{matrix}\right\} \xRightarrow{\textbf{T}\angle\mathbf{30^0}} \textbf{co}\sphericalangle\mathbf{30^0} = \frac{\textbf{ip.}}{\mathbf{2}}$$

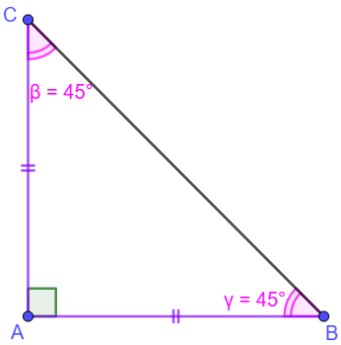
Reciproca T ∠30°: Dacă un triunghi dreptunghic are o catetă egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei, atunci unghiul opus acestei catete are măsura de 30°

$$\left.\begin{matrix}\Delta \textbf{ dreptunghic} \\ \mathbf{c_1} = \frac{\textbf{ip.}}{\mathbf{2}}\end{matrix}\right\} \xRightarrow{\textbf{RT}\angle\mathbf{30^0}} \sphericalangle\textbf{opus } \mathbf{c_1} = \mathbf{30^0}$$



Teorema medianei: Într-un triunghi dreptunghic mediana corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

$$\left.\begin{matrix}\Delta \textbf{ dreptunghic} \\ \textbf{mediana coresp. ip.}\end{matrix}\right\} \xRightarrow{\textbf{T med.}} \textbf{med.} = \frac{\textbf{ip.}}{\mathbf{2}}$$



Triunghiul dreptunghic isoscel: este triunghiul dreptunghic care are catetele congruente.

$$\Delta\textbf{ABC dreptunghic isoscel} \Rightarrow \sphericalangle\mathbf{A} = \mathbf{90^0} \textbf{ și } \mathbf{AB} = \mathbf{AC}$$

În triunghiul dreptunghic isoscel unghiurile ascuțite sunt congruente și au măsura egală cu 45°

$$\Delta\textbf{ABC dreptunghic isoscel} \Rightarrow \sphericalangle\mathbf{A} = \mathbf{90^0} \textbf{ și } \sphericalangle\mathbf{B} = \sphericalangle\mathbf{C} = \mathbf{45^0}$$

Cum demonstrăm că un triunghi este dreptunghic?

1. **Triunghiul are un unghi drept**

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC \\ \sphericalangle B = 90^0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \text{ dreptunghic în } B$$

2. **Reciproca teoremei lui Pitagora**

Dacă într-un triunghi pătratul lungimii unei laturi este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi, atunci triunghiul este dreptunghic

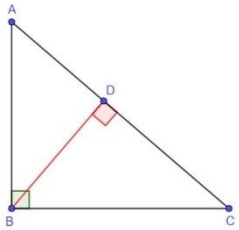
$$\text{Dacă } AC^2 = AB^2 + BC^2 \overset{R.T.P.}{\Longrightarrow} \Delta ABC \text{ drept. în } B$$

3. **Reciproca teoremei medianei**

Dacă într-un triunghi o mediană este egală cu jumătate din latura corespunzătoare ei, atunci triunghiul este dreptunghic având ca ipotenuză latura respectivă

$$\left.\begin{matrix}\Delta \\ \text{med.} = \dfrac{l}{2}\end{matrix}\right\} \overset{\text{RT med.}}{\Longrightarrow} \Delta \text{ dreptunghic}$$

4. **Reciproca teoremei înălțimii**



În triunghiul ABC dacă BD⊥AC, D∈AC și $BD^2 = AD \cdot DC$, atunci ∡ABC= 90°=> △ABC dreptunghic în B

5. **Reciproca teoremei catetei**

În triunghiul ABC dacă BD⊥AC, D∈AC și $AB^2 = AD \cdot AC$, atunci ∡ABC = 90° => △ABC dreptunghic în B

6. **Unghiuri ale unui triunghi sunt complementare**

∡BAC + ∡ACB = 90° => △ABC dreptunghic în B

Cum demonstrăm că un triunghi este dreptunghic isoscel?

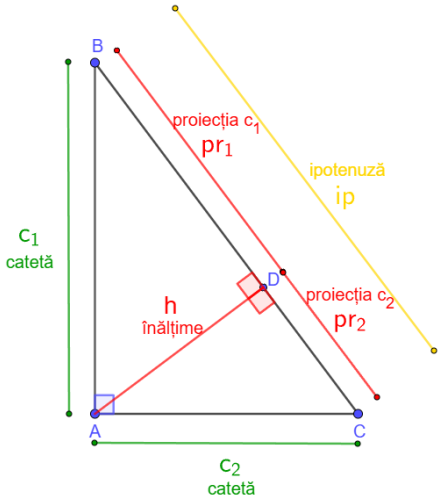
1. **Triunghiul are un unghi drept și catetele congruente**

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC \\ \sphericalangle A = 90^0 \\ AB = AC\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \text{ dreptunghic isoscel}$$

2. **Triunghiul are un unghi drept și un unghi ascuțit cu măsura de 45^0**

$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC \\ \sphericalangle A = 90^0 \\ \sphericalangle B = 45^0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \text{ dreptunghic isoscel}$$

RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC



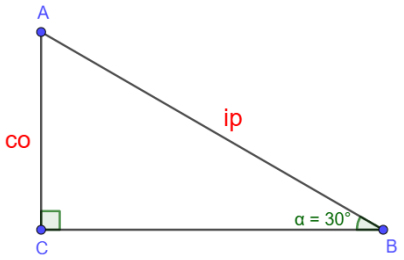
Teorema lui Pitagora $ip^2 = c_1^2 + c_2^2$

Teorema înălțimii $h^2 = pr_1 \cdot pr_2$

Proprietatea înălțimii $h = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip}$

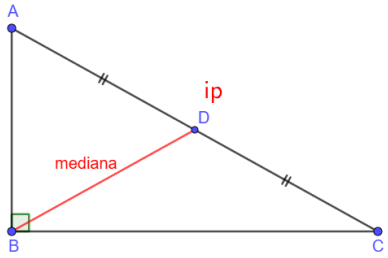
Teorema catetei $c_1^2 = pr_1 \cdot ip$

Teorema unghiului de 30^0



$$\left.\begin{array}{l}\Delta\ dreptunghic\\ \sphericalangle = 30^0\end{array}\right\} \Rightarrow co\sphericalangle 30^0 = \frac{ip}{2}$$

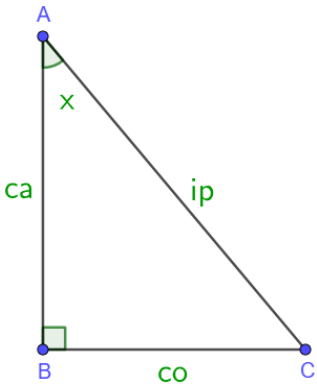
Teorema medianei



$$\left.\begin{array}{l}\Delta\ dreptunghic\\ mediana\ corespunzătoare\ ipotenuzei\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mediana = \frac{ip}{2}$$

Funcții trigonometrice



$$sinx = \frac{c.o.}{ip}$$

$$\cos x = \frac{c.a.}{ip}$$

$$tg\ x = \frac{c.o.}{c.a.}$$

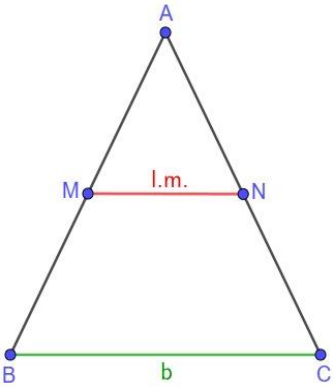
$$ctg\ x = \frac{c.a.}{c.o.}$$

	30^0	45^0	60^0
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Obs: c.o. cateta opusă unghiului x

c.a. cateta alăturată unghiului x

LINIA MIJLOCIE ÎN TRIUNGHI



l.m. = linia mijlocie în triunghi
b = baza

Este segmentul care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi.

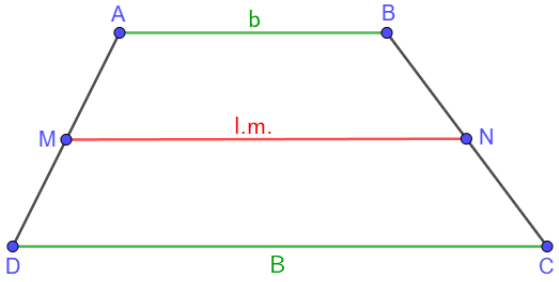
$$\left.\begin{matrix} M\ mij.[AB] \\ N\ mij.[AC] \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN\ l.m.\ \text{în}\ \triangle ABC \xrightarrow{teoremă}$$

- $\boldsymbol{l.m. \parallel b}$
- $\boldsymbol{l.m. = \frac{b}{2}}$

Teoremă:

$$\left.\begin{matrix} \Delta ABC \\ M\ mij.[AB] \\ MN \parallel BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow N\ mij.[AC]$$

LINIA MIJLOCIE ÎN TRAPEZ



l.m. = linia mijlocie în trapez
B = baza mare
b = baza mică

Este segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele ale uni trapez.

$$\left.\begin{matrix} M\ mij.[AD] \\ N\ mij.[BC] \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN\ l.m.\ \text{în}\ trapez \xrightarrow{teoremă}$$

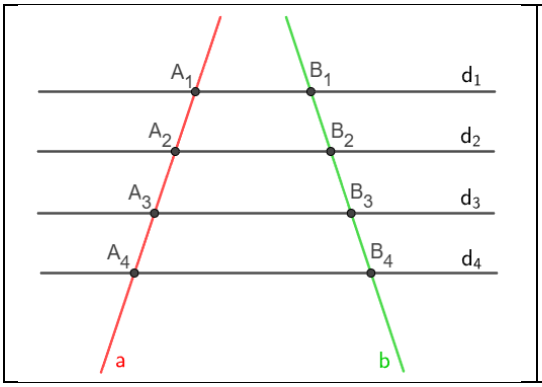
- $\boldsymbol{l.m. \parallel b \parallel B}$
- $\boldsymbol{l.m. = \frac{B+b}{2}}$

Teoremă:

$$\left.\begin{matrix} ABCD\ trapez \\ AB, DC\ baze \\ M\ mij.[AD] \\ MN \parallel AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow N\ mij.[BC]$$

TEOREMA PARALELELOR ECHIDISTANTE

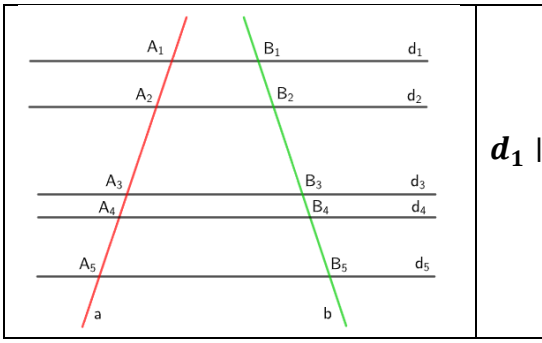
Dacă trei sau mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente congruente



$$\left.\begin{array}{c} d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \\ a \text{ secantă} \\ A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 \\ b \text{ secantă} \end{array}\right\} \Rightarrow B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$$

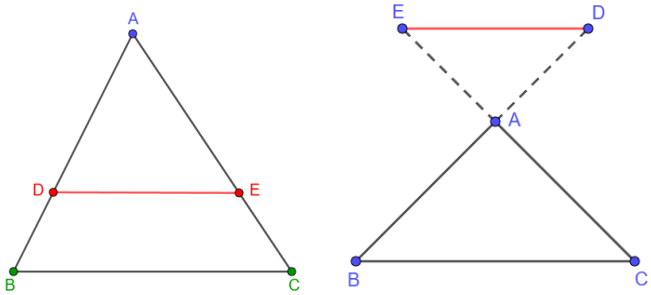
TEOREMA PARALELELOR NEECHIDISTANTE

Trei sau mai multe drepte paralele determină pe două secante segmente proporționale



$$\left.\begin{array}{c} d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \parallel d_5 \\ a \text{ secantă} \\ b \text{ secantă} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \frac{A_4A_5}{B_4B_5}$$

TEOREMA LUI THALES



$$\left.\begin{array}{c} \Delta ABC \\ DE \parallel BC \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (1)$$

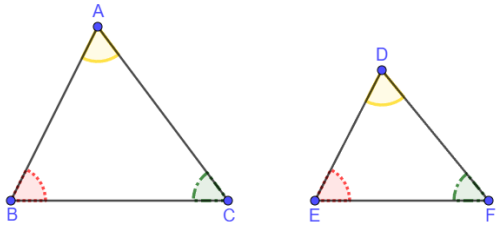
$$\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC} \quad (2)$$

$$\frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CE} \quad (3)$$

Reciproca teoremei lui Thales

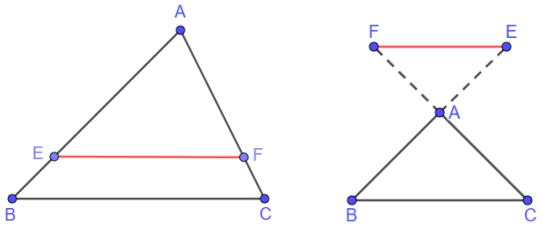
Dacă una din relațiile (1), (2) sau (3) este adevărată în ΔABC atunci $DE \parallel BC$

ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR



$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$
$$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$$
$$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$$
$$\sphericalangle C \equiv \sphericalangle F$$

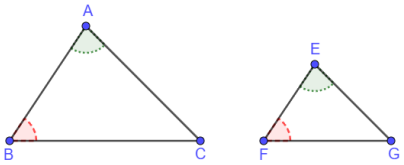
Teorema fundamentală a asemănării



$$\left.\begin{matrix} \Delta ABC \\ EF \parallel BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AEF$$

Criterii de asemănare

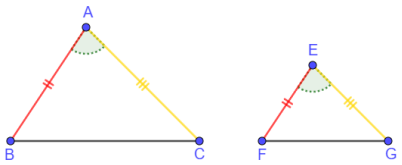
Unghi, unghi (UU)



$$\left.\begin{matrix} \sphericalangle A \equiv \sphericalangle E \\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle F \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\triangle ABC \sim \triangle EFG$$

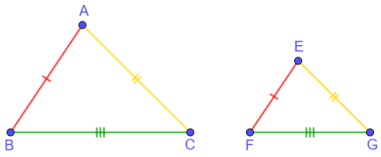
Latură, unghi, latură(LUL)



$$\left.\begin{matrix} \frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} \\ \sphericalangle A \equiv \sphericalangle E \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\triangle ABC \sim \triangle EFG$$

Latură, latură, latură(LLL)



$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG} \Rightarrow$$

$$\triangle ABC \sim \triangle EFG$$

Proporții derivate pornind de la $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a, b, c, d segmente

Schimbarea extremilor între ei $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

Schimbarea mezilor între ei $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Inversarea rapoartelor $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Modificarea numărătorilor sau a numitorilor prin:

Adunarea numitorilor la numărători (sau invers) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

Scăderea numitorilor la numărători (sau invers) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$; $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$

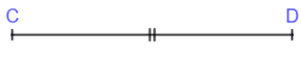
Șir de rapoarte egale $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{P_{\Delta 1}}{P_{\Delta 2}}$ **și** $\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 = \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^2 = \left(\frac{a_3}{b_3}\right)^2 = \frac{A_{\Delta 1}}{A_{\Delta 2}}$,

unde a_1, a_2, a_3 *laturile* $\Delta 1$ *și* b_1, b_2, b_3 *laturile* $\Delta 2$

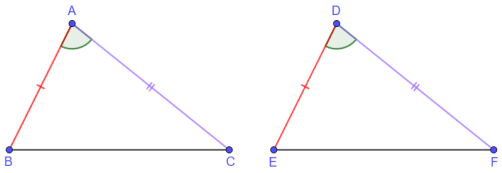
Cum demonstrăm că două SEGMENTE sunt CONGRUENTE?

Def.: Segmentele congruente sunt segmentele care au aceeași lungime.

Pentru a demonstra că două segmente sunt congruente arătăm că:

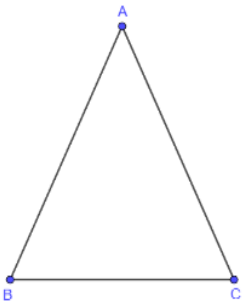


1. **Au aceeași lungime**
   AB = CD = x u.m. (unități de măsură)



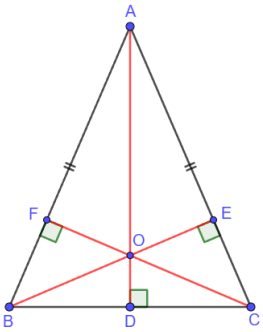
2. **Folosind metoda triunghiurilor congruente (congruența laturilor, unghiurilor) (L.U.L., U.L.U., L.L.L, L.U.U.)**

$$\left.\begin{matrix} AB = DE \\ \measuredangle A \equiv \measuredangle D \\ AC = DF \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF \Longrightarrow BC = EF$$



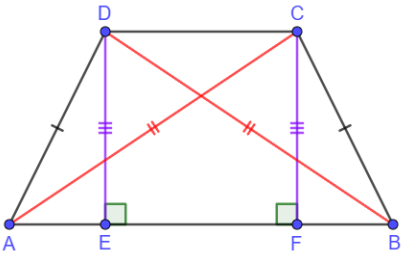
3. **Sunt laturi într-un triunghi isoscel sau echilateral**

$$\left.\begin{matrix} \Delta ABC \ \ isoscel \\ BC \ baza \end{matrix}\right\} \Longrightarrow AB = AC$$



4. **Sunt înălțimi, bisectoare, mediane corespunzătoare laturilor (unghiurilor) congruente într-un triunghi isoscel sau echilateral**

$$\left.\begin{matrix} \Delta ABC \ is. \\ BC \ bază \\ BE, CF \ h \end{matrix}\right\} \Rightarrow BE = CF$$

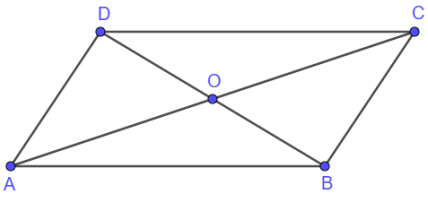


5. **Sunt laturile neparalele într-un trapez isoscel**

$$\left.\begin{matrix} ABCD \ trapez \ isoscel \\ AB \parallel CD \end{matrix}\right\} \Longrightarrow AD = BC$$

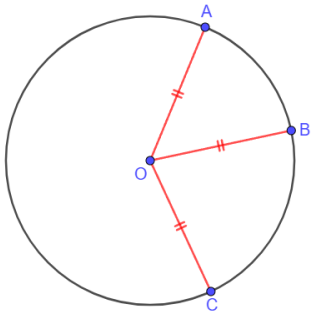
6. **Sunt diagonale (sau înălțimi) într-un trapez isoscel**

$$\left.\begin{matrix} ABCD \ trapez \ isoscel \\ AB \parallel CD \\ DE, CF \ înălțimi \\ AC, BD \ diagonale \end{matrix}\right\} \Longrightarrow DE = CF \text{ și } AC = BD$$



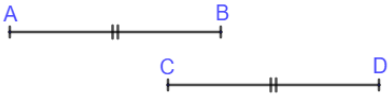
7. Sunt laturile opuse într-un paralelogram, dreptunghi, romb sau pătrat

$$ABCD\ paralelogram \Rightarrow \begin{cases} AB = CD \\ AD = BC \end{cases}$$



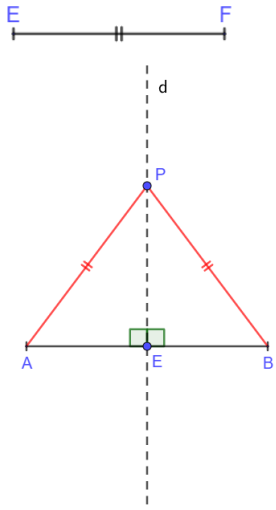
8. Sunt raze în același cerc

$$\left.\begin{matrix} cerc \\ OA, OB, OC\ raze \end{matrix}\right\} \Rightarrow OA = OB = OC$$



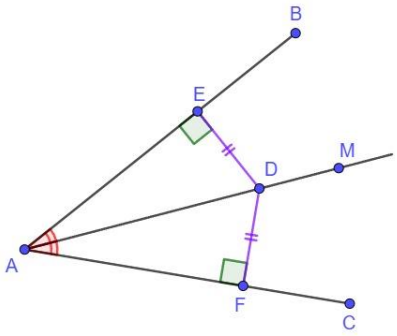
9. Sunt congruente cu un același segment

$$\left.\begin{matrix} AB = CD \\ EF = CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB = EF$$



10. Sunt segmente formate de un punct al mediatoarei unui segment și capetele segmentului (proprietatea mediatoarei)

$$\left.\begin{matrix} P \in d \\ d\ \ mediatoarea\ [AB] \end{matrix}\right\} \Rightarrow [PA] \equiv [PB]$$



11. Sunt segmente formate de un punct al bisectoarei unui unghi cu picioarele perpendicularelor duse din acel punct pe laturile unghiului (proprietatea bisectoarei)

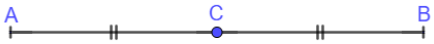
$$\left.\begin{matrix} [AM\ bis. \sphericalangle BAC \\ D \in [AM \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(D, AC) = d(D, AB)$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow DF = DE$$

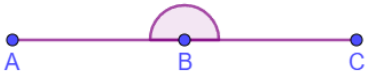
Cum demonstrăm că trei sau mai multe PUNCTE sunt COLINIARE?

Def: Trei sau mai multe puncte sunt coliniare dacă aparțin aceleeași drepte.

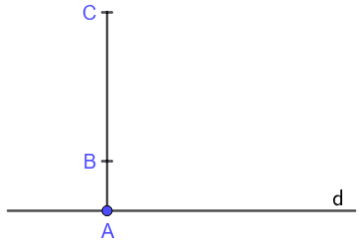


1. **Cu ajutorul mijlocului unui segment**
   Dacă C mijlocul segmentului [AB] => A, C, B coliniare

2. **Arătăm că AB + BC = AC => A, B, C coliniare**

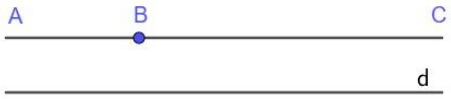


3. **Dacă formează un unghi alungit**
   Arătăm ∢ ABC = 180° => ∢ABC alungit => A, B, C coliniare



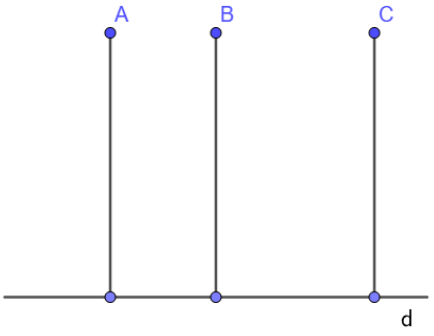
4. **Cu ajutorul a două drepte perpendiculare pe o altă dreaptă în același punct**

$$\left.\begin{matrix} BA \perp d \\ CA \perp d \end{matrix}\right\} \Rightarrow A, B, C \text{ coliniare}$$



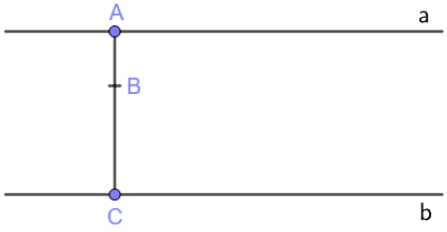
5. **Cu ajutorul a două semidrepte, având aceeași origine, paralele cu aceeași dreaptă**

$$\left.\begin{matrix} [BA \parallel d \\ [BC \parallel d \end{matrix}\right\} \Rightarrow A, B, C \text{ coliniare}$$



6. **Cu ajutorul distanțelor, arătând că fiind de aceeași parte a unei drepte sunt la aceeași distanță față de acea dreaptă**

   d(A,d)=d(B,d)=d(C,d)⇒A, B, C coliniare

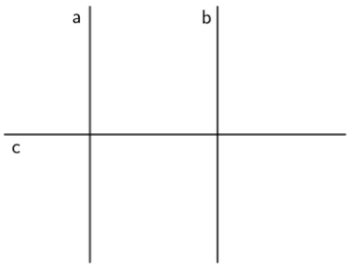


7.

$$\left.\begin{matrix} a \parallel b \\ BA \perp a \\ BC \perp b \end{matrix}\right\} \Rightarrow A, B, C \text{ coliniare}$$

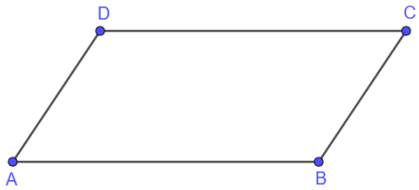
Cum demonstrăm că două DREPTE sunt PARALELE?

Def.: Două drepte coplanare sunt paralele dacă nu au nici un punct comun.



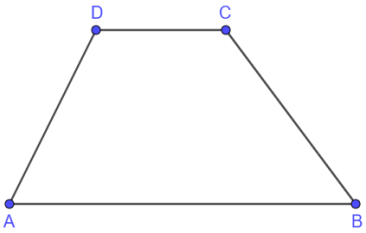
1. altă dreaptă este perpendiculară pe fiecare din ele sau sunt perpendiculare pe aceeași dreaptă

Dacă $\left.\begin{matrix} a \perp c \\ b \perp c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel b$ sau $\left.\begin{matrix} c \perp a \\ c \perp b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel b$



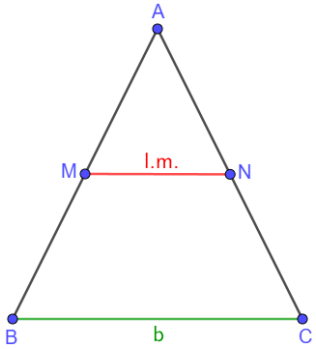
2. sunt laturi opuse într-un paralelogram (dreptunghi, romb sau pătrat)

ABCD paralelogram $\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$



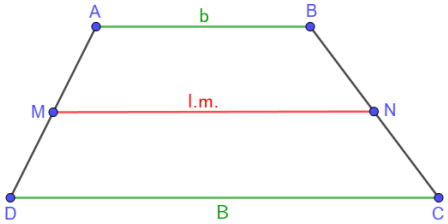
3. sunt bazele unui trapez

$\left.\begin{matrix} ABCD - \text{trapez} \\ AD, BC \text{ neparalele} \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \| CD$



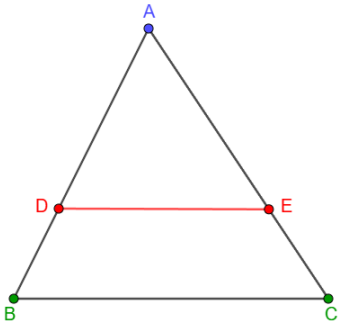
4. cu linia mijlocie a triunghiului

$\left.\begin{matrix} \Delta ABC \\ MN \text{ linie mijlocie} \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN \| BC$



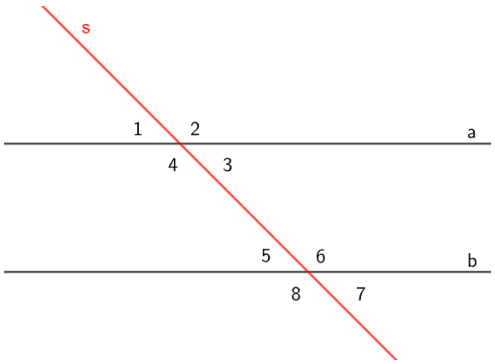
5. cu linia mijlocie în trapez

$\left.\begin{matrix} ABCD \text{ trapez} \\ MN \text{ linie mijlocie} \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN \| AB \parallel CD$



6. cu reciproca teoremei lui Thales

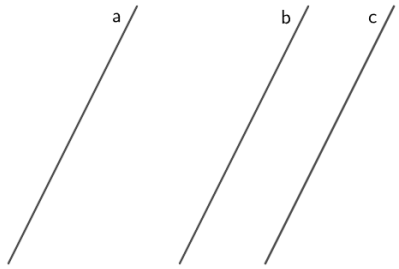
$$\left.\begin{matrix} \Delta ABC \\ D \in AB, \ E \in AC \\ \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC} \ (\text{sau cele derivate}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow DE \parallel BC$$



7. **dacă tăiate de o secantă formează unghiuri :**
- alterne interne sau alterne externe sau corespondente congruente

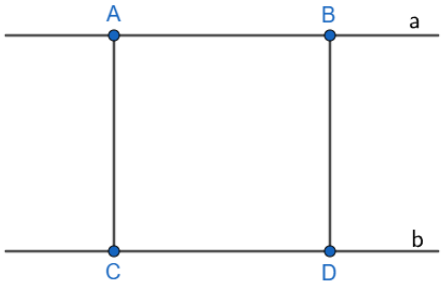
- interne de aceeași parte a secantei sau externe de aceeași parte a secantei suplementare

dacă $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 7$(alterne externe)$\Longrightarrow a \parallel b$ sau $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 8 = 180^0$ (externe de aceeași parte a secantei)$\Longrightarrow a \parallel b$



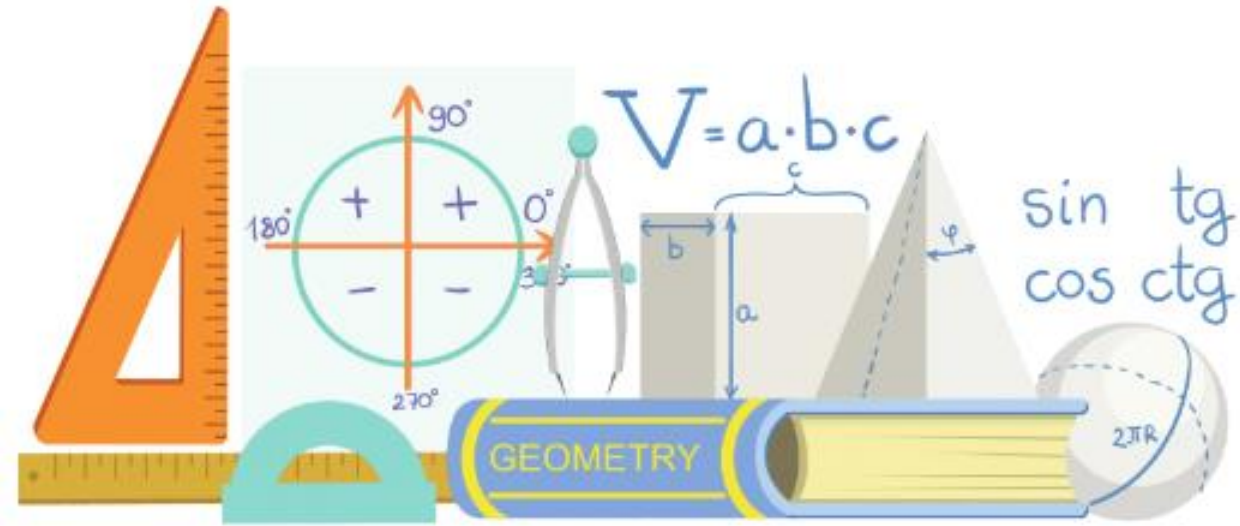
8. **sunt paralele cu o altă dreaptă**

$$\left.\begin{matrix} a \parallel b \\ b \parallel c \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a \parallel c$$



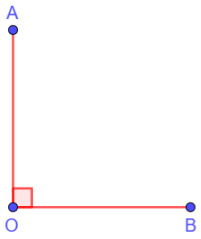
9. **distanța dintre ele este constantă**

$$\left.\begin{matrix} AC \perp b \\ A, B \in a \\ BD \perp b \\ C, D \in b \\ [AC] \equiv [BD] \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a \parallel b$$



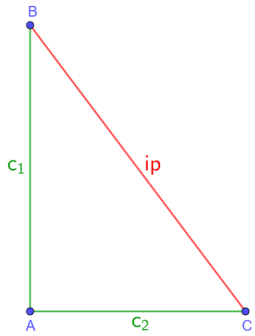
Cum demonstrăm că două DREPTE sunt PERPENDICULARE?

Def.:Două drepte sunt perpendiculare dacă formează un unghi drept.



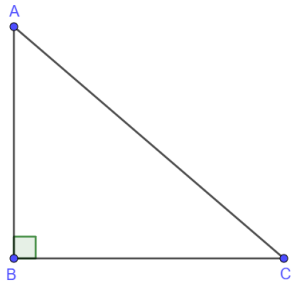
1. Formează un unghi drept

∠AOB= 90° => AO⊥OB



2. Sunt catetele unui triunghi dreptunghic

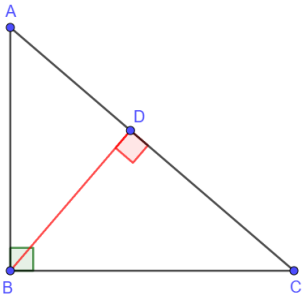
$\left.\begin{matrix}\Delta ABC\ dreptunghic \\ AB, AC\ catete\end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp AC$



3. Verificăm dacă triunghiul este dreptunghic cu:

a) Reciproca Teoremei lui Pitagora

Dacă $AC^2 = AB^2 + BC^2$ => △ABC dreptunghic în B => AB⊥BC

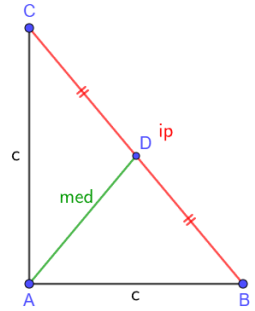


b) Reciproca teoremei înălțimii

În triunghiul ABC dacă BD⊥AC, D∈AC și $BD^2 = AD \cdot DC$, atunci ∠ABC = 90°=> △ABC dreptunghic în B => AB ⊥BC

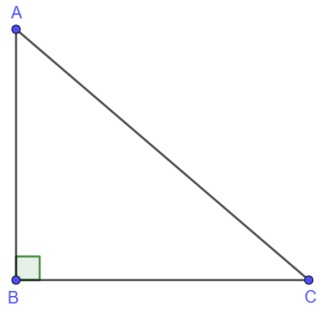
c) Reciproca teoremei catetei

În triunghiul ABC dacă BD⊥AC, D∈AC și $AB^2 = AD \cdot AC$, atunci ∠ABC = 90° => △ABC dreptunghic în B => AB⊥BC



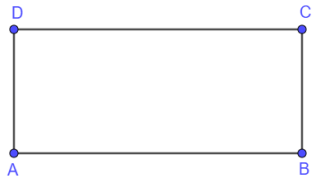
d) Reciproca teoremei medianei într-un triunghi

Dacă mediana $AD = \frac{BC}{2}$ => △ABC dreptunghic în A => AB⊥AC



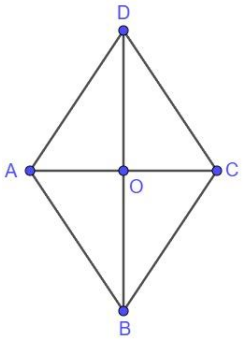
e) Unghiuri ale unui triunghi sunt complementare

∠BAC+∠ACB= 90°=> △ABC dreptunghic în B => AB⊥BC



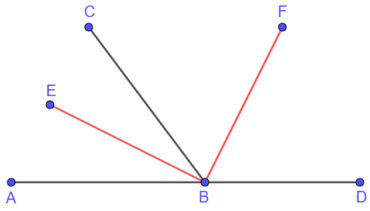
4. Sunt laturile alăturate într-un dreptunghi (pătrat)

ABCD dreptunghi=> AB⊥BC



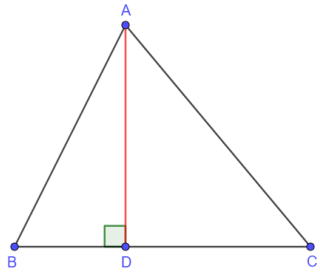
5. Sunt diagonalele unui romb (pătrat)

$$\left.\begin{matrix} ABCD\ romb \\ AC, BD\ diagonale \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp BD$$



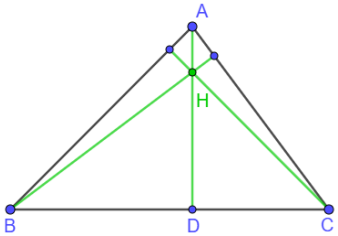
6. Sunt bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare

$$\left.\begin{matrix} \angle ABC, \angle CBD \text{ adiacente suplementare} \\ [BE\ bis. \sphericalangle ABC \\ [BF\ bis. \sphericalangle CBD \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{BE}\perp\text{BF}$$



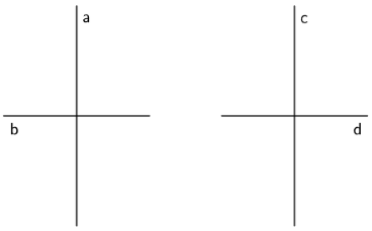
7. Una este înălțime, iar cealaltă este bază într-un triunghi

$$\left.\begin{matrix} \Delta ABC \\ AD\ \text{înalțime} \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD \perp BC$$



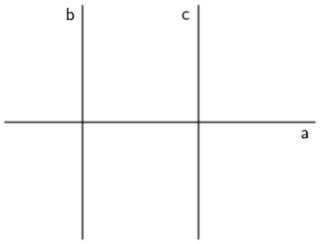
8. Una dintre ele conține ortocentrul triunghiului, iar cealaltă este latura opusă

$$\left.\begin{matrix} H\ ortocentrul\ \Delta ABC \\ H \in AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD \perp BC$$



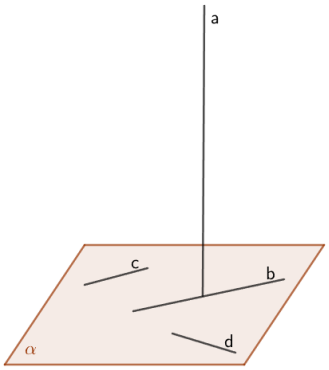
9. **Sunt paralele cu alte două drepte perpendiculare**

$$\left.\begin{matrix} a \perp b \\ c \parallel a \\ d \parallel b \end{matrix}\right\} \Rightarrow c \perp d$$



10. **Dreptele a și b sunt perpendiculare și dreptele b și c sunt paralele atunci dreptele a și c sunt perpendiculare**

$$\left.\begin{matrix} a \perp b \\ b \parallel c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \perp c$$

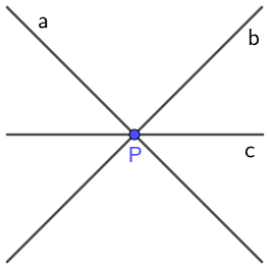


11. **O dreaptă perpendiculară pe un plan este perpendiculară pe orice dreaptă din acel plan**

$$\left.\begin{matrix} a \perp \alpha \\ b, c, d \subset \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \perp b;\ a \perp c;\ \ a \perp d$$

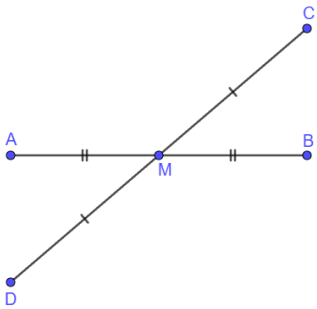
Cum demonstrăm că DREPTELE sunt CONCURENTE?

Def: Două sau mai multe drepte sunt concurente sau secante dacă au un punct comun.



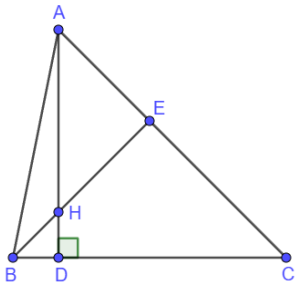
1. **Au un punct comun**

$$\left.\begin{matrix} P \in a \\ P \in b \\ P \in c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a, b, c \text{ concurente}$$



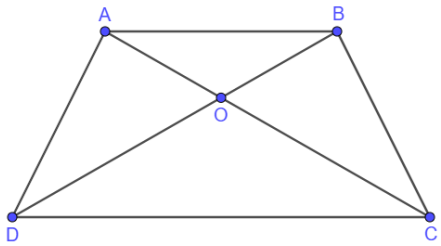
2. **Un punct este mijlocul fiecărui segment**

$$\left.\begin{matrix} M \text{ mij. } [AB] \\ M \text{ mij.} [CD] \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB, CD \text{ concurente}$$



3. **Sunt linii importante în triunghi (înălțimi, mediane, bisectoare sau mediatoare)**

$$\left.\begin{matrix} AD \ h \text{ în } \Delta ABC \\ BE \ h \text{ în } \Delta ABC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD, BE \text{ concurente}$$



4. **Sunt diagonale într-un patrulater convex (paralelogram, dreptunghi, romb, pătrat, trapez)**

$$\left.\begin{matrix} ABCD \text{ patrulater convex} \\ AC, BD \text{ diagonale} \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC, BD \text{ concurente}$$

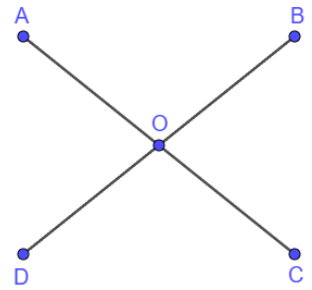
Cum demonstrăm că PATRU PUNCTE sunt COPLANARE?

Def: Patru sau mai multe puncte sunt coplanare dacă aparțin aceluiași plan.

1. **Două laturi ale patrulaterului (determinat de cele patru puncte) sunt paralele** (deoarece două drepte paralele determină un plan)

   Obs.: Folosim una din variantele de la : ”*Cum demonstrăm că două drepte sunt paralele*”

   $AB \| CD \Longrightarrow A, B, C, D$ *coplanare*



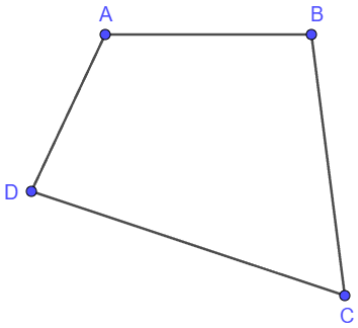
2. **Două segmente determinate de cele patru puncte sunt diagonale ale unui patrulater convex (paralelogram, dreptunghi, pătrat, romb sau trapez);** (deoarece două drepte concurente determină un plan)

   $AC \cap BD = \{O\} \Longrightarrow A, B, C, D$ *coplanare*

PATRULATERE CONVEXE

Patrulater convex oarecare

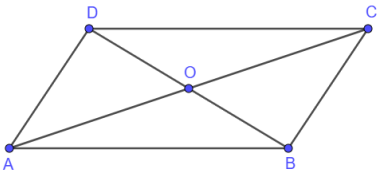
- Laturi : AB, BC, CD, DA
- Laturi opuse: (AB, DC) ; (AD, BC)
- Laturi alăturate: ex. (AD, AB)
- Unghiuri: $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C, \sphericalangle D$
- Unghiuri opuse: $(\sphericalangle A, \sphericalangle C); (\sphericalangle B, \sphericalangle D)$
- Unghiuri alăturate: ex. $(\sphericalangle A, \sphericalangle B)$
- Diagonale: AC, BD



Paralelogramul

Într-un paralelogram:

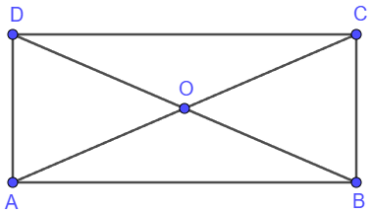
- Laturile opuse sunt paralele două câte două
- Laturile opuse sunt congruente două câte două
- Unghiurile opuse sunt congruente
- Oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare
- Punctul de intersecție al diagonalelor este mijlocul fiecărei diagonale



Dreptunghiul

Într-un dreptunghi:

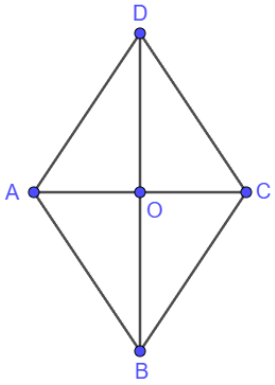
- Laturile opuse sunt paralele
- Laturile opuse sunt congruente
- Toate unghiurile sunt drepte
- Diagonalele sunt congruente
- Punctul de intersecție al diagonalelor este mijlocul fiecărei diagonale



Rombul

Într-un romb:

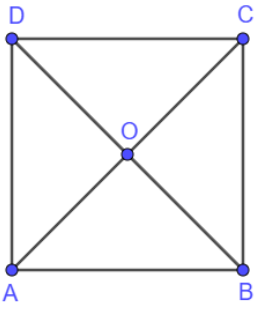
- Laturile opuse sunt paralele
- Toate laturile sunt congruente
- Unghiurile opuse sunt congruente
- Oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare
- Punctul de intersecție al diagonalelor este mijlocul fiecărei diagonale
- Diagonalele sunt perpendiculare
- Diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor rombului



Pătratul

Într-un pătrat:

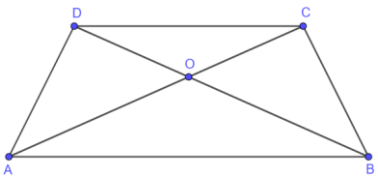
- Laturile opuse sunt paralele
- Toate laturile sunt congruente
- Toate unghiurile sunt drepte
- Punctul de intersecție al diagonalelor este mijlocul fiecărei diagonale
- Diagonalele sunt perpendiculare
- Diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor pătratului



Trapezul

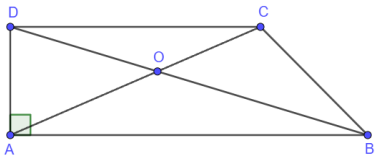
Într-un trapez:

- Două laturi sunt paralele iar celelalte două neparalele.
- Unghiurile alăturate laturilor neparalele sunt suplementare



Trapezul isoscel *are:*

- Laturile neparalele congruente
- Unghiurile alăturate unei baze congruente
- Diagonalele congruente



Trapezul dreptunghic are un unghi drept

Cum demonstrăm că un PATRULETER CONVEX este ...

<table>
<tr><td colspan="2">PARALELOGRAM

1. Laturile opuse sunt paralele două câte două
2. Laturile opuse sunt congruente două câte două
3. Unghiurile opuse sunt congruente două câte două
4. Punctul de intersecție al diagonalelor este mijlocul fiecărei diagonale
5. O pereche de laturi opuse sunt paralele și congruente</td></tr>
<tr><td>DREPTUNGHI

1. Paralelogram + un unghi de 90°
2. Paralelogram + diagonale congruente
3. Trei unghiuri de 90°</td><td>ROMB

1. Paralelogram + diagonale perpendiculare
2. Paralelogram + o diagonală bisectoarea unui unghi
3. Paralelogram + două laturi consecutive congruente
4. Toate laturile congruente</td></tr>
<tr><td colspan="2">PĂTRAT

1. Dreptunghi + diagonale perpendiculare
2. Dreptunghi + o diagonală bisectoarea unui unghi
3. Dreptunghi + două laturi consecutive congruente
4. Romb + un unghi de 90°
5. Romb + diagonale congruente</td></tr>
</table>

Cum demonstrăm că un patrulater convex este TRAPEZ?

Un patrulater convex este TRAPEZ dacă are două laturi paralele iar celelalte două neparalele.

a) Cum demonstrăm că un TRAPEZ este ISOSCEL?

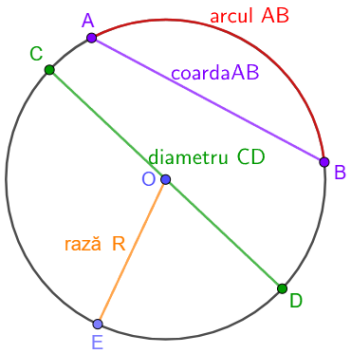
Un trapez este isoscel dacă:

- Laturile neparalele sunt congruente sau
- Diagonalele sunt congruente sau
- Unghiurile alăturate unei baze sunt congruente

b) Cum demonstrăm că un TRAPEZ este DREPTUNGHIC?

Un trapez este dreptunghic dacă are un unghi drept.

CERCUL



Diametrul = 2R

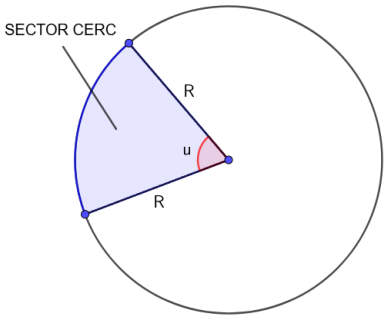
Diametrul împarte cercul în două semicercuri

Punctele C, D diametral opuse⟹

CD diametru

Măsura unui semicerc = 180^0

Măsura unui cerc = 360^0



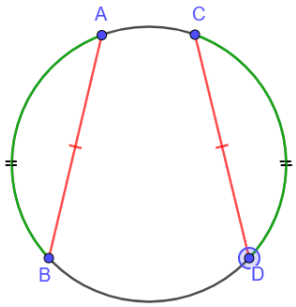
Aria cercului = πR^2

Lungimea cercului = $2\pi R$

$$A_{sector} = \frac{\pi R^2 \cdot u^0}{360^0}$$

$$L_{arc\ cerc} = \frac{2\pi R \cdot u^0}{360^0}$$

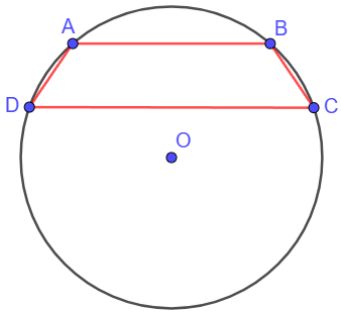
Teorema 1



$[AB]=[CD]$
$\Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$

Coardelor congruente le corespund arce congruente, și invers.

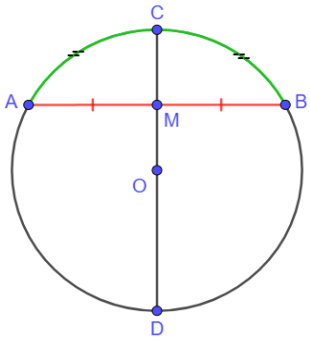
Teorema 2



$AB \parallel CD \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \begin{cases} [AD] \equiv [BC] \\ \widehat{AD} \equiv \widehat{BC} \end{cases}$

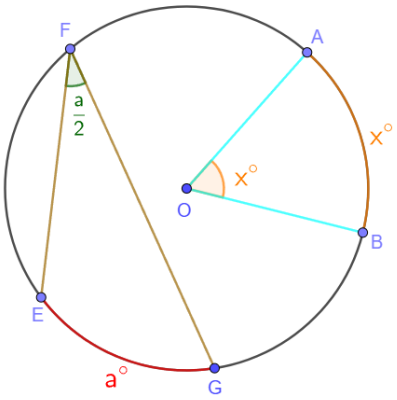
Dacă două coarde sunt paralele atunci arcele cuprinse între ele sunt congruente.

Teorema 3



$\left.\begin{matrix} CD\ diametru \\ AB\ coardă \\ CD \perp AB \end{matrix}\right] \Rightarrow \begin{cases} [AM] \equiv [MB] \\ \widehat{AC} \equiv \widehat{CB} \\ \widehat{AD} \equiv \widehat{DB} \end{cases}$

Un diametru perpendicular pe o coardă trece prin mijlocul coardei și determină pe fiecare dintre arcele subântinse coardei, arce congruente.



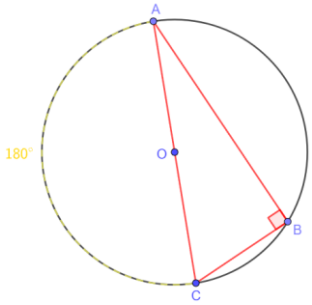
$\sphericalangle AOB$ unghi la centru (unghiul cu vârful în centrul cercului)

$$\sphericalangle AOB = \widehat{AB} = x^0$$

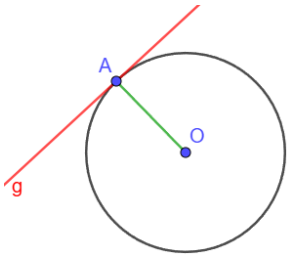
$\sphericalangle EFG$ unghi înscris în cerc (unghiul cu vârful pe cerc)

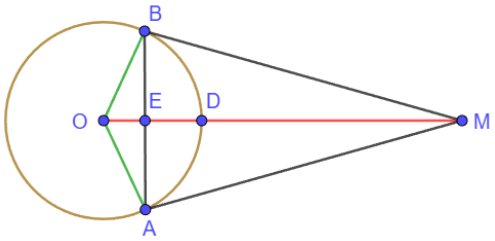
$$\sphericalangle EFG = \frac{\widehat{EG}}{2} = \frac{a^0}{2}$$

Triunghi dreptunghic înscris în cerc ⇔ ipotenuza = diametrul cercului



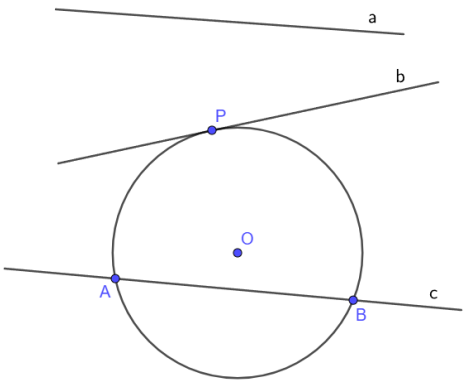
Dreapta g tangentă cercului în A
$\Rightarrow R = OA \perp g$





Proprietățile ”ciocului de cioară”

$$M \notin C(O,R) \Rightarrow \begin{cases} MA \equiv MB \\ [OM \text{ bis.} \sphericalangle AOB \\ [MO \text{ bis.} \sphericalangle AMB \\ OM \perp AB \\ E \text{ mij } AB \\ \widehat{AD} = \widehat{DB} \end{cases}$$



Poziția unei drepte față de un cerc

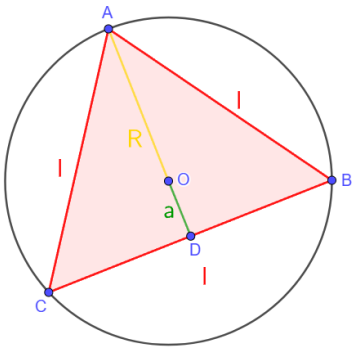
Dreapta a exterioară cercului

Dreapta b tangentă cercului

Dreapta c secantă cercului

POLIGOANE REGULATE

Poligoanele regulate sunt poligoanele cu laturile și unghiurile congruente.



$$P = 3 \cdot l$$

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

TRIUNGHIUL ECHILATERAL

$$l = R\sqrt{3}$$

Apotema triunghiului echilateral $a = a_3 = \frac{R}{2}$

Sau:

$$\left.\begin{matrix} \Delta ABC \text{ echilateral} \\ O \text{ centrul cercului circumscris triunghiului} \end{matrix}\right\}$$

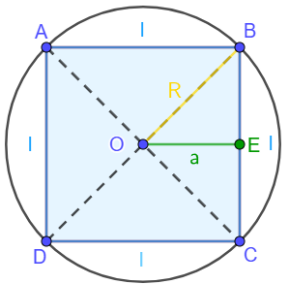
$\Rightarrow O$ centru de greutate, ortocentrul triunghiului

$\Rightarrow AD$ mediană și înălțime

AD h $\Rightarrow AD = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

AD mediană $\Rightarrow R = AO = \frac{2}{3} \cdot AD$

$$\Rightarrow a_3 = OD = \frac{1}{3} \cdot AD$$



$$P = 4 \cdot l$$

$$A = l^2$$

PĂTRATUL

$$l = R\sqrt{2}$$

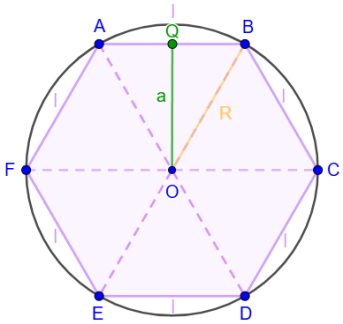
Apotema pătratului $a = a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Sau:

$$\left.\begin{matrix} ABCD \text{ pătrat} \\ DB \text{ diagonală} \end{matrix}\right\} \Rightarrow DB = l\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow R = OB = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

$a_4 = OE = \frac{l}{2}$ sau OE linie mijlocie în ΔDBC



$$P = 6 \cdot l$$

$$A = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

HEXAGONUL REGULAT

$$l = R$$

Apotema hexagonului regulat $a = a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Sau:

ABCDEF hexagon regulat

$\Rightarrow$ 6 triunghiuri echilaterale

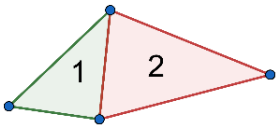
$\Delta AOB, \Delta BOC, \Delta COD, \Delta DOE, \Delta EOF, \Delta FOA$

$\Rightarrow l = R$

OQ h în ΔAOB echilateral $\Rightarrow a_6 = OQ = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

PERIMETRELE ȘI ARIILE FIGURILOR GEOMETRICE

PATRULATERE

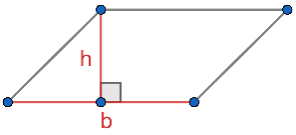


Perimetrul = suma tuturor laturilor

$\mathbf{P} = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$

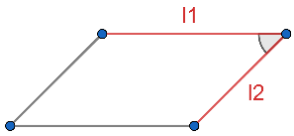
$A_{patr.} = A_{\Delta_1} + A_{\Delta_2}$

PARALELOGRAM

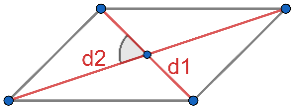


$\mathbf{P} = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$

$A = b \cdot h$

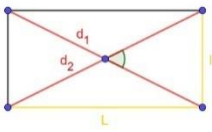


$A = l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\angle l_1, l_2)$



$A = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin(\angle d_1, d_2)}{2}$

DREPTUNGHI

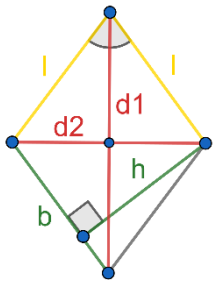


$\mathbf{P} = 2 \cdot \mathbf{L} + 2 \cdot \mathbf{l}$

$A = L \cdot l$

$A = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin(\angle d_1, d_2)}{2}$

ROMB



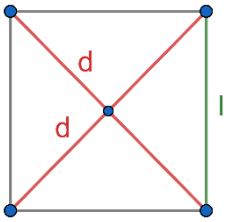
$\mathbf{P} = 4 \cdot \mathbf{l}$

$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

$A = b \cdot h$

$A = l \cdot l \cdot \sin(\angle l, l)$

PĂTRAT

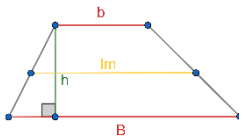


$\mathbf{P} = 4 \cdot \mathbf{l}$

$A = l^2$

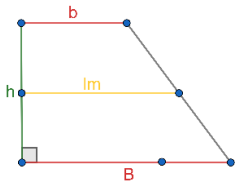
$A = \frac{d \cdot d}{2}$

TRAPEZ



$\mathbf{P} = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$

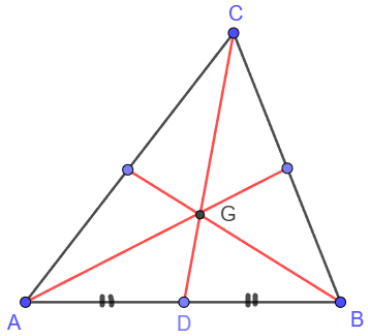
$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$



$A = lm \cdot h$

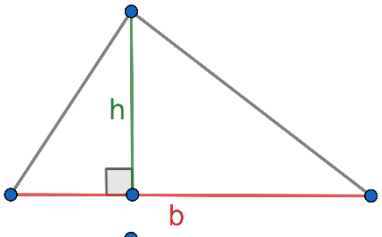
$lm = \frac{B + b}{2}$

TRIUNGHI

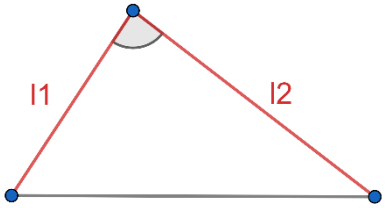


Proprietatea medianei într-un triunghi
Mediana împarte triunghiul în două triunghiuri de arii egale.

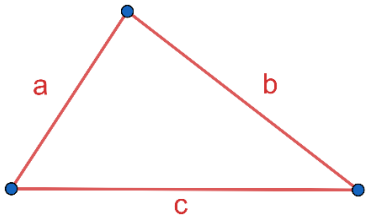
$$\left.\begin{matrix}\Delta ABC \\ CD\ mediană\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow A_{CAD} = A_{CDB}$$



$$P = l_1 + l_2 + l_3$$
$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad (1)$$

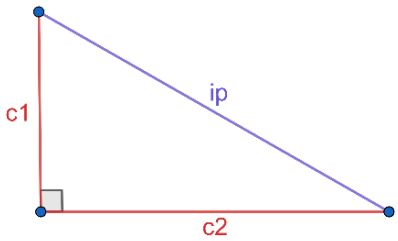


$$A = \frac{l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\angle l_1, l_2)}{2} \quad (2)$$



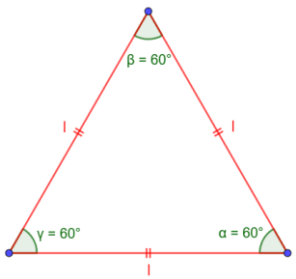
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (3)$$
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Aria triunghiului dreptunghic



$$A = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} \quad + (1); (2); (3)$$

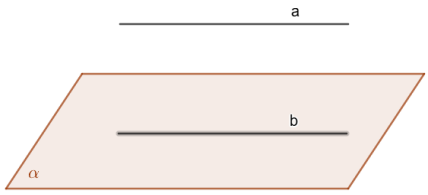
Aria triunghiului echilateral



$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \quad + (1); (2); (3)$$

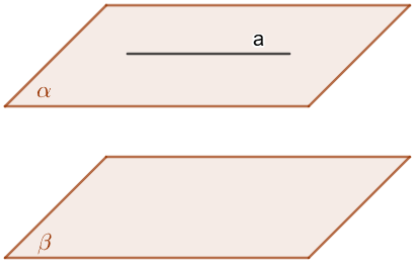
GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

Cum demonstrăm că...?



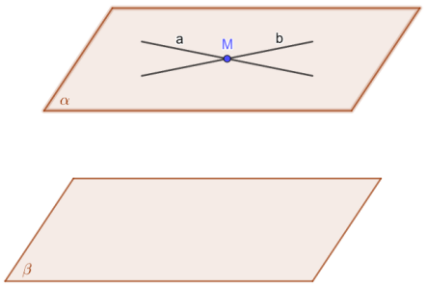
O dreaptă este paralelă cu un plan dacă dreapta este paralelă cu o dreaptă inclusă în acel plan

$$\left.\begin{matrix} a \parallel b \\ b \subset \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel \alpha$$



O dreaptă a din planul α este paralelă cu planul β dacă planele α și β sunt paralele

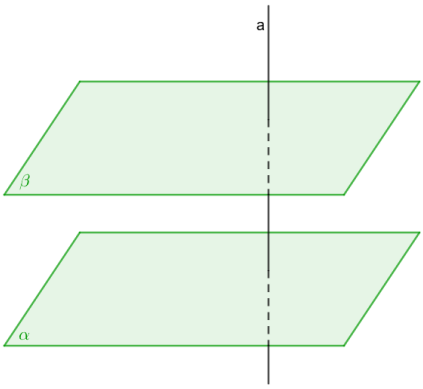
$$\left.\begin{matrix} \alpha \parallel \beta \\ a \subset \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel \beta$$



Două plane sunt paralele

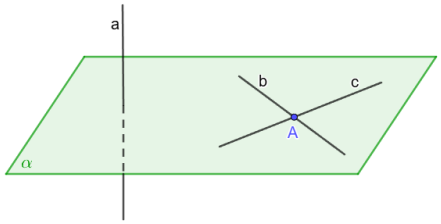
1. Dacă două drepte concurente dintr-un plan sunt paralele cu celălalt plan.

$$\left.\begin{matrix} a, b \subset \alpha \\ a \cap b = \{M\} \\ a \parallel \beta \\ b \parallel \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$



2. Dacă o dreaptă este perpendiculară pe cele două plane

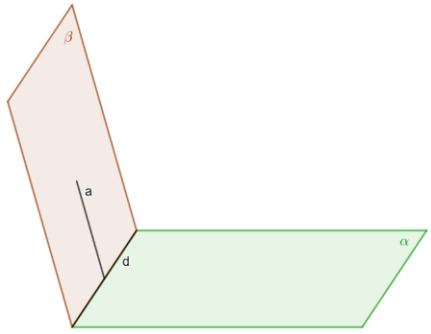
$$\left.\begin{matrix} a \perp \alpha \\ a \perp \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$



O dreaptă este perpendiculară pe un plan:

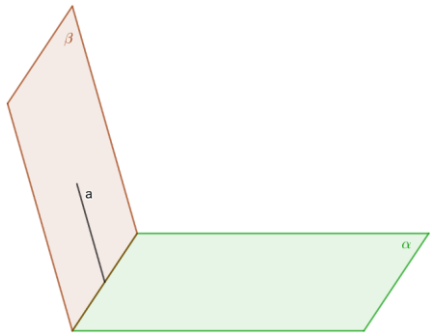
1. Dacă dreapta este perpendiculară pe două drepte concurente din acel plan.

$$\left.\begin{array}{c} a \perp b \\ a \perp c \\ b, c \subset \alpha \\ b \cap c = \{A\} \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \alpha$$



2. Dacă dreapta (din β) este perpendiculară pe dreapta comună a două plane perpendiculare (α și β)

$$\left.\begin{array}{c} \alpha \perp \beta \\ \alpha \cap \beta = d \\ a \perp d \\ a \subset \beta \end{array}\right\} \Longrightarrow a \perp \alpha$$



Două plane sunt perpendiculare

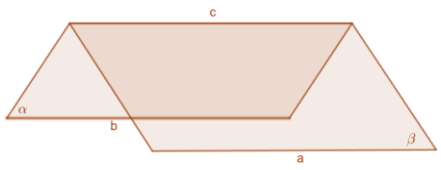
1. dacă o dreaptă dintr-un plan este perpendiculară pe celălalt plan.

$$\left.\begin{array}{c} a \subset \beta \\ a \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \beta \perp \alpha$$

2. Dacă unghiul dintre cele două plane este de 90^0

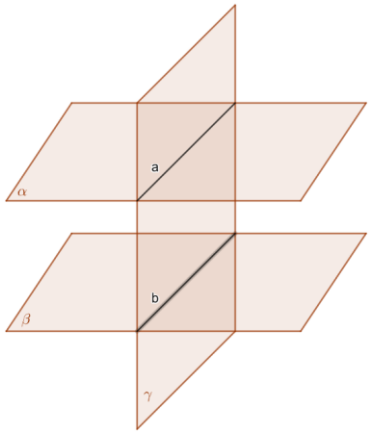
$$m\left(\measuredangle(\alpha, \beta)\right) = 90^0$$

TEOREME DE PARALELISM ȘI PERPENDICULARITATE



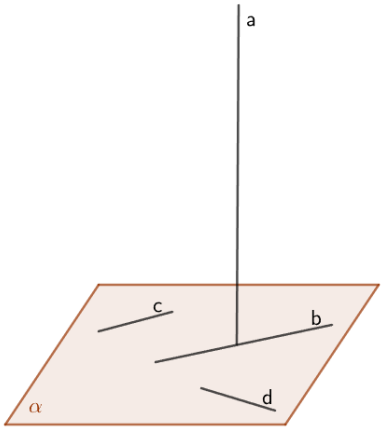
Teorema acoperișului

$$\left.\begin{array}{c} a \parallel b \\ a \subset \beta \\ b \subset \alpha \\ \alpha \cap \beta = c \end{array}\right\} \Longrightarrow a \parallel b \parallel c$$



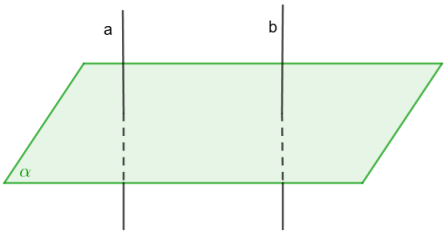
Teorema fierăstrăului

$$\left.\begin{array}{c} \alpha \parallel \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \end{array}\right\} \Longrightarrow a \parallel b$$



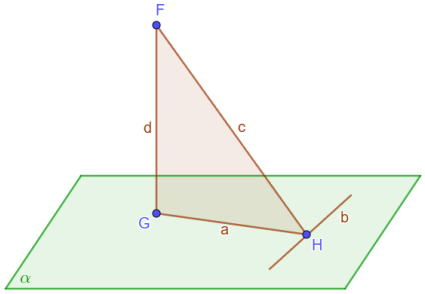
O dreaptă perpendiculară pe un plan este perpendiculară pe orice dreaptă din acel plan .

$$\left.\begin{matrix} a \perp \alpha \\ b, c, d \subset \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \perp b;\ a \perp c;\ \ a \perp d$$



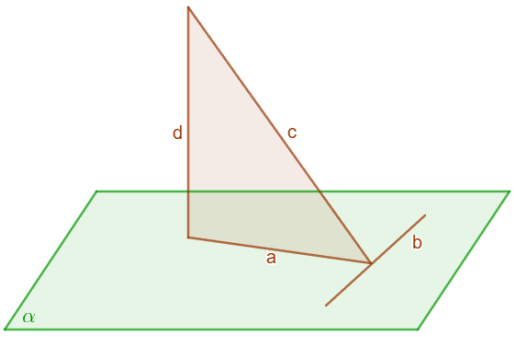
$$\left.\begin{matrix} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel b$$

TEOREMA CELOR 3 PERPENDICULARE



$$\left.\begin{matrix} d \perp \alpha \\ a \perp b \\ a, b \subset \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow c \perp b$$

$$\left.\begin{matrix} FG \perp \alpha \\ FG \cap \alpha = \{G\} \\ GH \perp b \\ GH, b \subset \alpha \\ GH \cap b = \{H\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow FH \perp b \Rightarrow d(F, b) = FH$$



Reciproca 1 a teoremei celor 3 perpendiculare

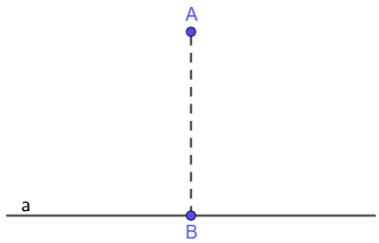
$$\left.\begin{matrix} d \perp \alpha \\ c \perp b \\ a, b \subset \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \perp b$$

Reciproca 2 a teoremei celor 3 perpendiculare

$$\left.\begin{matrix} d \perp a \\ a \perp b \\ b \perp c \\ a, b \subset \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \perp \alpha$$

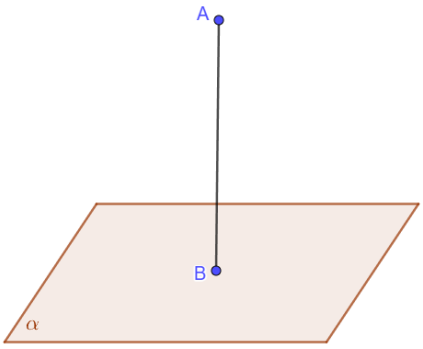
DISTANȚE ÎN SPAȚIU

Cum aflăm distanțele?



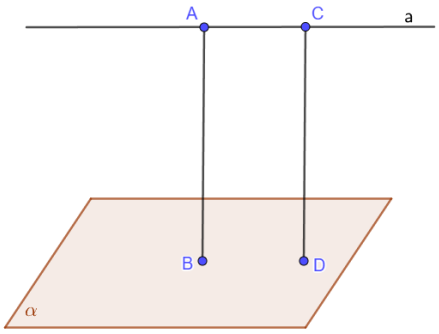
Distanța de la un punct la o dreaptă

1. $\left.\begin{matrix} A \notin a \\ AB \perp a \\ B \text{ piciorul perpendicularei din } A \text{ pe dr. } a \end{matrix}\right\} \Rightarrow$
   $d(A,a) = [AB]$
2. Cu teorema celor trei perpendiculare



Distanța de la un punct la un plan

1. $\left.\begin{matrix} A \notin \alpha \\ AB \perp \alpha \\ B \text{ piciorul perpendicularei din } A \text{ pe planul } \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow$
   $d(A,\alpha) = [AB]$
2. Cu reciproca a doua teoremei celor trei perpendiculare
3. Volumul piramidei în două moduri

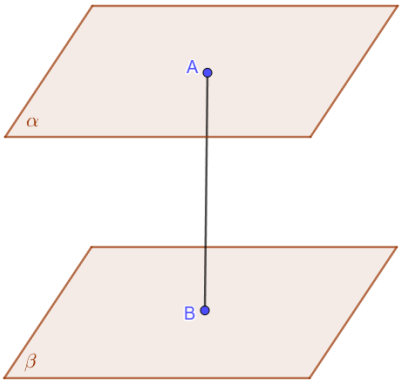


Distanța dintre o dreaptă și un plan (Dreapta paralelă cu planul)

$$\left.\begin{matrix} a \parallel \alpha \\ A \in a \\ AB \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(a,\alpha) = [AB]$$

Obs.: Dacă $A, C \in a \Rightarrow d(A,\alpha) = d(C,\alpha)$

AB = CD



Distanța dintre două plane paralele

$$\left.\begin{matrix} \alpha \parallel \beta \\ AB \perp \alpha \\ AB \perp \beta \\ AB \cap \alpha = \{A\} \\ AB \cap \beta = \{B\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(\alpha,\beta) = [AB]$$

Cum calculăm distanțele?

1. Încadrăm segmentul aflat într-un triunghi.
2. Dacă segmentul este:
   - Catetă în triunghi dreptunghic, o calculăm cu una din variantele: Teorema lui Pitagora, funcții trigonometrice, Teorema unghiului de 30^0, triunghiuri asemenea
   - Înălțime în triunghi dreptunghic, o calculăm cu una din variantele: proprietatea înălțimii, teorema înălțimii sau cu aria triunghiului în două moduri, unde una din formule să fie $\boldsymbol{A = \frac{b \cdot h}{2}}$ (egalăm cele două arii)
   - Înălțime în triunghi dreptunghic isoscel, o calculăm cu Teorema medianei sau cu variantele de la catetă sau înălțime în triunghiul dreptunghic
   - Înălțime în triunghiul isoscel, o calculăm cu variantele de la catetă în triunghiul dreptunghic (se formează două triunghiuri dreptunghice congruente) sau cu aria triunghiului în două moduri unde una din formule să fie $\boldsymbol{A = \frac{b \cdot h}{2}}$
   - Înălțime în triunghiul oarecare, o calculăm cu aria triunghiului în două moduri unde una din formule să fie $\boldsymbol{A = \frac{b \cdot h}{2}}$ sau cu triunghiuri asemenea

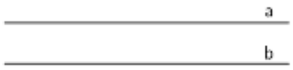
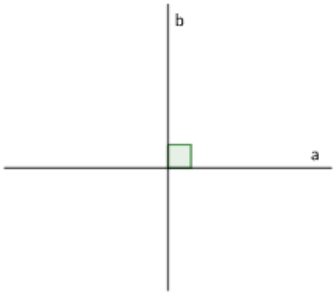
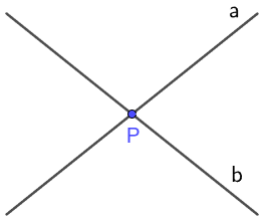
Obs.: Pentru a calcula distanța de la un punct la un plan putem folosi volumul piramidei în două moduri (aflăm înălțimea din egalarea volumelor)

UNGHIURI ÎN SPAȚIU

Cum aflăm și cum calculăm unghiul?

UNGHIUL DINTRE DOUĂ DREPTE

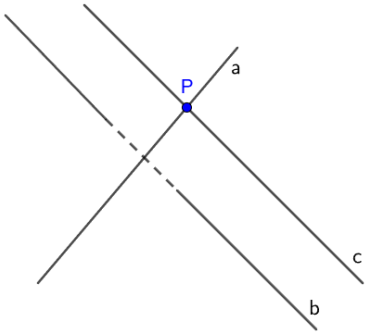
Coplanare

Paralele $a \parallel b$ **sau coincid a=b**	**Perpendiculare** $a \perp b$	**Concurente (secante)** $a \cap b = \{P\}$
		
$\sphericalangle(a,b) = 0^0$	$\sphericalangle(a,b) = 90^0$	$\sphericalangle(a,b) = unghiul\ ascuțit\ format\ de\ dr.a\ și\ b$

Necoplanare

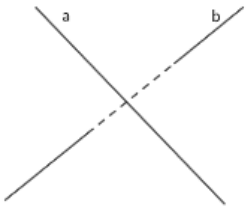
(dreptele care nu sunt nici paralele, nici concurente) $a \nparallel b$ $a \cap b = \phi$

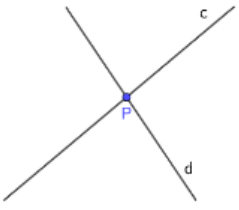
Trasăm o paralelă la una dintre drepte astfel încât să se intersecteze cu cea de-a doua



$$\left.\begin{array}{l} b \parallel c \\ a \cap c = \{P\} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle(a,b) = \sphericalangle(a,c)$$

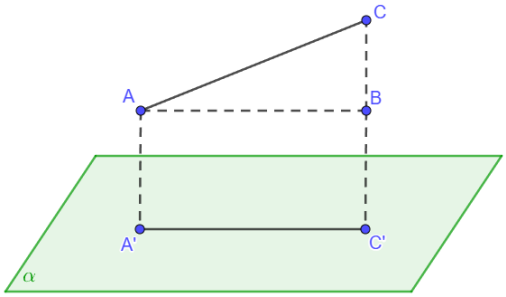
Luăm un punct în spațiu
Prin punctul ales trasăm paralele la cele două drepte





$$\left.\begin{array}{l} b \parallel c \\ a \parallel d \\ c \cap d = \{P\} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle(a,b) = \sphericalangle(c,d)$$

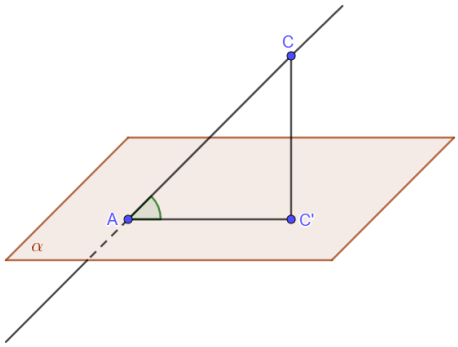
UNGHIUL DINTRE O DREAPTĂ ȘI UN PLAN



- Proiectăm dreapta pe plan (proiectând două puncte A și C de pe dreaptă)
- Unghiul dintre dreaptă și plan este unghiul format de dreaptă și proiecția dreptei pe plan

$$\left.\begin{matrix} pr_\alpha A = A' \\ pr_\alpha C = C' \end{matrix}\right\} \Rightarrow pr_\alpha AC = A'C' \Rightarrow \sphericalangle(AC, \alpha) = \sphericalangle(AC, A'C') = \sphericalangle(AC, AB) = \sphericalangle(CAB)$$

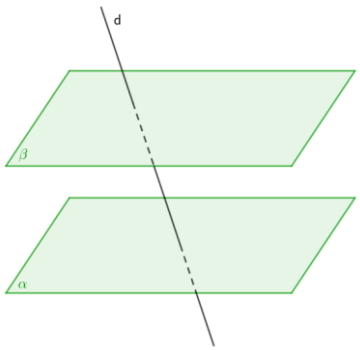
Obs.: $AB \parallel A'C'$



$$\left.\begin{matrix} pr_\alpha A = A \\ pr_\alpha C = C' \end{matrix}\right\} \Rightarrow pr_\alpha AC = AC' \Rightarrow \sphericalangle(AC, \alpha) = \sphericalangle(AC, AC') = \sphericalangle(CAC')$$

Obs.: 1. Dacă dreapta este paralelă cu planul sau dreapta este inclusă în plan măsura unghiului este de 0^0.

$$\left.\begin{matrix} d \parallel \alpha \\ sau \\ d \subset \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sphericalangle(d, \alpha) = 0^0$$

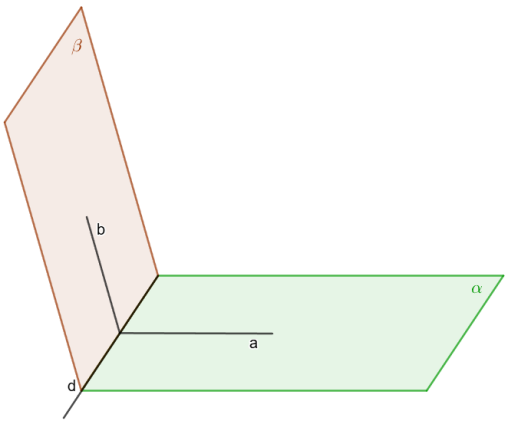


2. Dacă două plane sunt paralele, atunci măsura unghiul dintre o dreaptă și un plan este egală cu măsura unghiului dintre aceea dreaptă și celălalt plan

$$\left.\begin{matrix} \alpha \parallel \beta \\ d \ dreaptă \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle(d, \beta)$$

UNGHIUL DINTRE DOUĂ PLANE.

UNGHIUL DIEDRU (unghiul format de două semiplane delimitate de aceeași dreaptă sau unghiul format de două plane secante)



- Aflăm dreapta de intersecție a celor două plane
- Trasăm din fiecare plan (semiplan) câte o perpendiculară pe dreapta de intersecție (în același punct)

$$\left.\begin{matrix} \alpha \cap \beta = d \\ a \perp d \\ b \perp d \\ a \subset \alpha \\ b \subset \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sphericalangle(\alpha, \beta) = \sphericalangle(a, b)$$

- Unghiul dintre cele două plane este unghiul format de cele două perpendiculare trasate anterior.

Obs.: 1. Dacă planele sunt paralele sau coincid unghiul are 0^0.

2. Dacă planele sunt perpendiculare unghiul are 90^0

Pentru a calcula măsura unui unghi (diferit de 0^0 *sau* 90^0) procedăm astfel:

1. Încadrăm unghiul într-un triunghi
2. - Dacă triunghiul este echilateral măsura unghiului este de 60^0
   - Dacă triunghiul este dreptunghic isoscel măsura unghiului este de 45^0
   - Dacă triunghiul este dreptunghic calculăm măsura unghiului cu funcții trigonometrice sau (dacă se poate) cu Reciproca unghiului de 30^0
   - Dacă triunghiul este oarecare sau isoscel calculăm măsura unghiului cu aria triunghiului de două ori, unde una din formule să fie $A = \frac{l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\angle l_1, l_2)}{2}$ sau trasăm o înălțime în triunghiul oarecare și obținem două triunghiuri dreptunghice

-

CORPURI GEOMETRICE

Important!

- Într-un corp înălțimea este perpendiculară pe planul bazei (bazelor)
- O dreaptă perpendiculară pe un plan este perpendiculară pe orice dreaptă din acel plan.

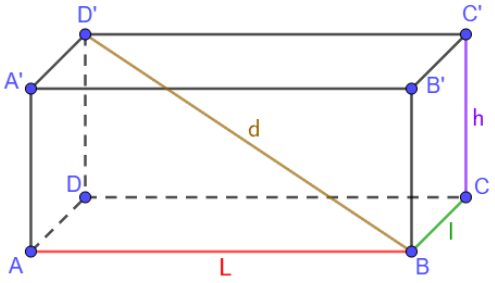
PRISME

Notații:

l - latura bazei; m - muchia laterală; h - înălțimea; d - diagonala

A_l - aria laterală; A_t - aria totală; V - volum

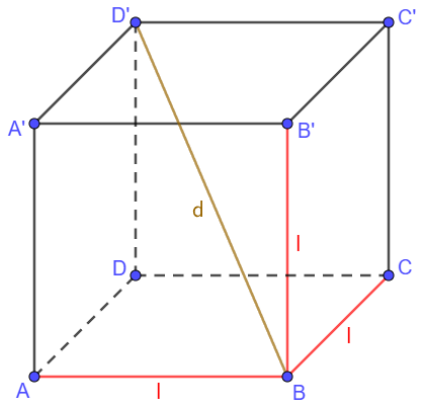
PARALELIPIPEDUL DREPTUNGHIC



Fețele sunt dreptunghiuri congruente două câte două.

$$A_l = 2 \cdot L \cdot h + 2 \cdot l \cdot h$$
$$A_t = 2 \cdot L \cdot l + 2 \cdot l \cdot h + 2 \cdot L \cdot h$$
$$V = L \cdot l \cdot h$$
$$d_{paralelipiped} = \sqrt{L^2 + l^2 + h^2}$$
$$h = CC' \perp (ABC) \text{ și pe } (A'B'C')$$

CUBUL



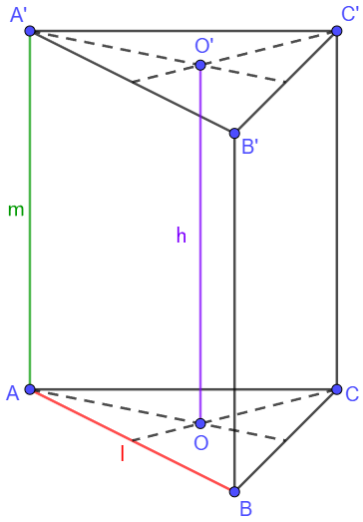
Toate fețele sunt pătrate.

$$A_l = 4 \cdot l^2$$
$$A_t = 6 \cdot l^2$$
$$V = l^3$$
$$d_{cub} = l\sqrt{3}$$
$$d_{pătrat} = l\sqrt{2}$$
$$h = l$$
$$h = CC' \perp (ABC) \text{ și pe } (A'B'C')$$

PRISME REGULATE

- Bazele sunt poligoane regulate (triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat)
- Fețele laterale sunt dreptunghiuri
- Înălțimea = muchia laterală

PRISMA TRIUNGHIULARĂ REGULATĂ

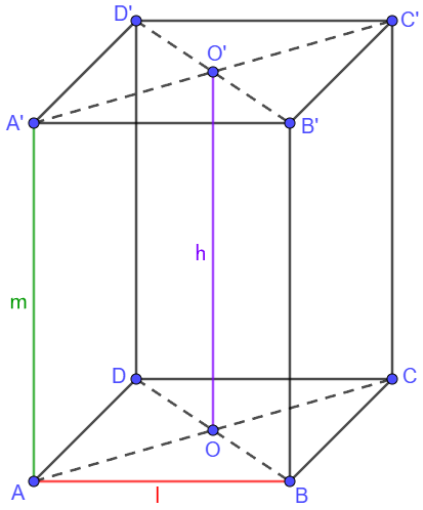


$P_b = 3 \cdot l$

$\boldsymbol{A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}}$

$\boldsymbol{A_l = 3 \cdot A_{dreptunghi}}$

PRISMA PATRULATERĂ REGULATĂ

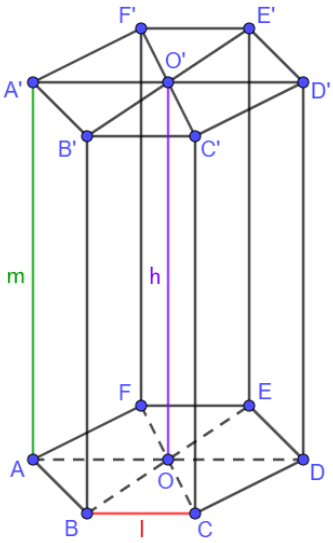


$P_b = 4 \cdot l$

$\boldsymbol{A_b = l^2}$

$\boldsymbol{A_l = 4 \cdot A_{dreptunghi}}$

PRISMA HEXAGONALĂ RGULATĂ



$P_b = 6 \cdot l$

$\boldsymbol{A_b = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}}$

$\boldsymbol{A_l = 6 \cdot A_{dreptunghi}}$

$\boldsymbol{A_l = P_b \cdot h}$

$\boldsymbol{A_t = 2 \cdot A_b + A_l}$

$\boldsymbol{V = A_b \cdot h}$

$\boldsymbol{h = m}$ ***(muchia laterală)***

$\boldsymbol{h = OO' \perp (ABC)}$ ***și pe*** $\boldsymbol{(A'B'C')}$

PIRAMIDA

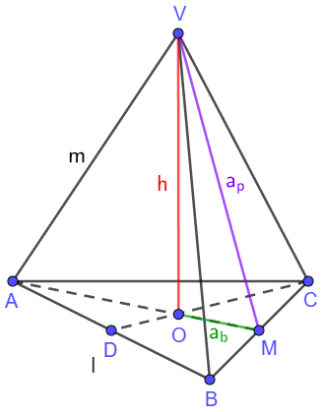
Notații:

l - latura bazei; m - muchia laterală; h - înălțimea; a_p - apotema piramidei; a_b - apotema bazei

A_l - aria laterală; A_t - aria totală; A_b - aria bazei; V - volum

Obs.: Înălțimea piramidei este perpendiculară pe planul bazei

TRIUNGHIULARĂ REGULATĂ

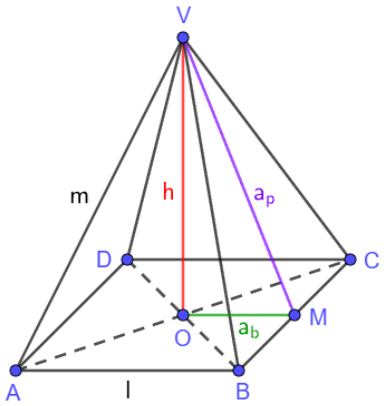


$$P_b = 3 \cdot l$$

$$A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_l = 3 \cdot A_{VBC\ is.}$$

PATRULATERĂ REGULATĂ



$$P_b = 4 \cdot l$$

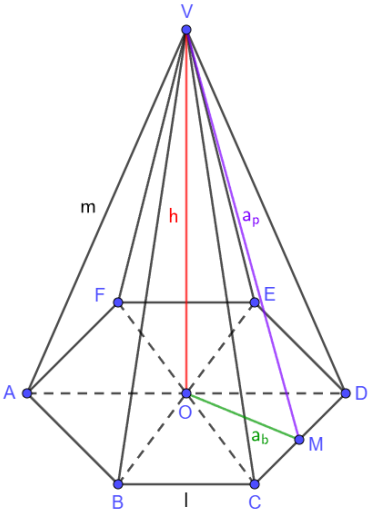
$$A_b = l^2$$

$$A_l = 4 \cdot A_{VBC\ is.}$$

Secțiuni diagonale

ΔVAC ; ΔVBD isoscele

HEXAGONALĂ REGULATĂ



$$P_b = 6 \cdot l$$

$$A_b = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_l = 6 \cdot A_{VBC\ is.}$$

Secțiuni diagonale

ΔVAD ; ΔVBE; ΔVCF isoscele

$$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$$

$$A_t = A_b + A_l$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

$$h = VO \perp (ABC)$$

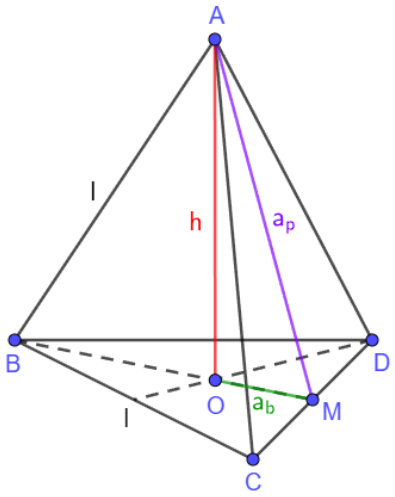
$$a_p = VM \perp BC$$

Triunghiuri dreptunghice VOM, VOA, VMC

Obs.: Pentru calcularea apotemei bazei folosim formulele de la ”Poligoane regulate” pag. 64

TETRAEDRUL REGULAT

- Piramida triunghiulară cu toate muchiile congruente
- Fețele sunt triunghiuri echilaterale



$$A_l = 3 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_t = 4 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

$$h = AO \perp (BCD)$$

$$a_p = AM \perp CD$$

a_p = înălțimea în *triunghiul echilateral* $ACD \Longrightarrow$

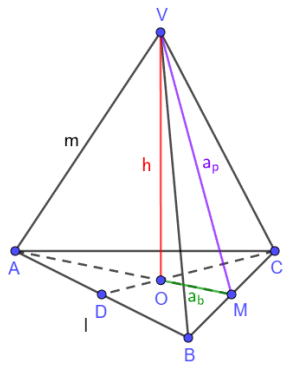
$$a_p = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

BM = AM

Obs.: Se pot folosi și formulele de la piramida triunghiulară regulată

Triunghiuri dreptunghice AOM, AOB, AMD, BMD

Cum demonstrăm că o PIRAMIDĂ este REGULATĂ

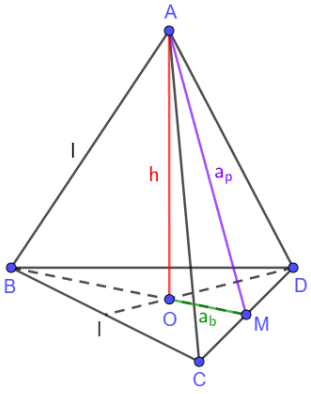


O piramidă este regulată dacă:

1. Baza este poligon regulat (triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat) și muchiile laterale sunt congruente

sau

2. Baza este poligon regulat (triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat) și segmentul determinat de vârful piramidei și centrul poligonului este perpendicular pe bază



O piramidă triunghiulară este tetraedru regulat dacă toate muchiile sunt congruente

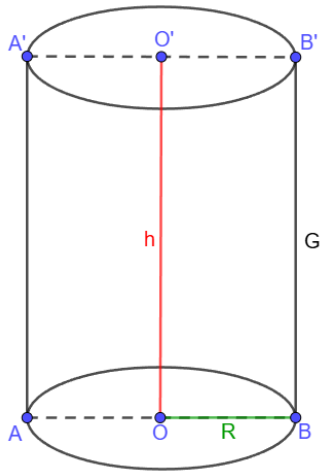
CORPURI ROTUNDE

Notații:

h - înălțimea; G - generatoarea; R - rază

A_l - aria laterală; A_t - aria totală; A_b - aria bazei; V - volum

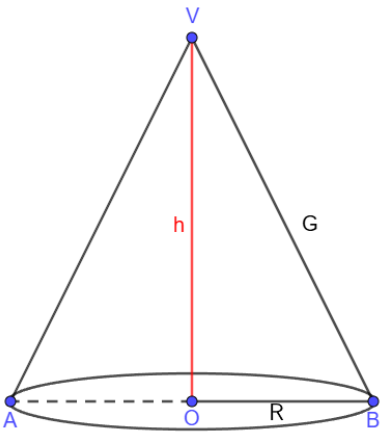
CILINDRU



$$h = G$$
$$h = OO' \perp \mathcal{C}(O, R)$$
$$h = OO' \perp \mathcal{C}(O', R)$$
$$A_l = 2 \cdot \Pi \cdot R \cdot G$$
$$A_b = \Pi \cdot R^2$$
$$A_t = 2 \cdot A_b + A_l$$
$$V = A_b \cdot h$$

Secțiunea axială:
Dreptunghiul $ABB'A'$

CON

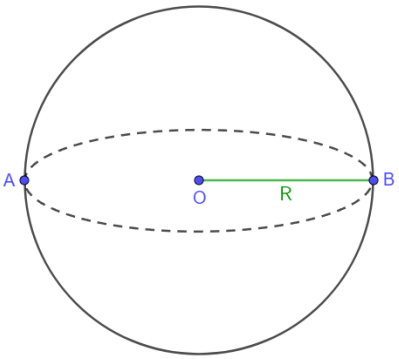


$VO \perp \mathcal{C}(O, R) \Rightarrow$
Triunghiurile dreptunghice în O
VOA și VOB

$$A_l = \Pi \cdot R \cdot G$$
$$A_b = \Pi \cdot R^2$$
$$A_t = A_b + A_l$$
$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

Secțiunea axială:
Triunghiul isoscel VAB

SFERA

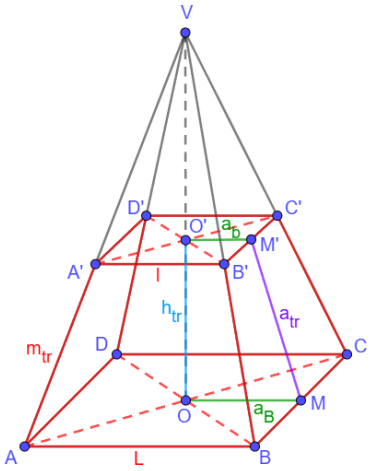


$$A = 4 \cdot \Pi \cdot R^2$$
$$V = \frac{4 \cdot \Pi \cdot R^3}{3}$$

TRUNCHIUL de ...

Trunchiul de piramidă (con) se obține prin secționarea piramidei (conului) cu un plan paralel cu baza.

TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ ABCDA′B′C′D′



$$A_l = \frac{(P_B + P_b)\cdot a_{tr}}{2}$$

$A_l = n \cdot A_{trapezCBB'C'}$, unde n este numărul fețelor laterale

$$A_t = A_B + A_b + A_l$$

$$V_{tr.} = \frac{\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)\cdot h_{tr}}{3}$$

$$V_{tr.} = V_{pir.mare} - V_{pir.mică}$$

Secțiunea diagonală:

Trapezele isoscele $ACC'A'$ și $DBB'D'$

h=$OO' \perp (ABC)$

h=$OO' \perp (A'B'C')$

Trapeze dreptunghice:

$O'OBB'$, $O'OMM'$, $B'BMM'$

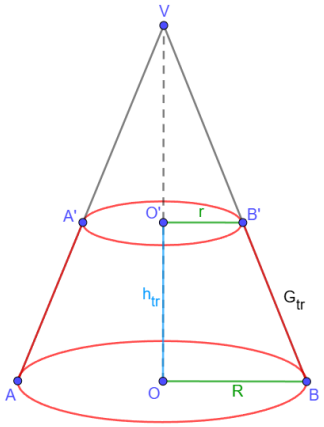
Piramida VABCD~Piramida V$A'B'C'D'$

$$\Rightarrow \frac{H}{h} = \frac{L}{l} = \frac{M}{m} = \frac{a_P}{a_p} = \frac{a_B}{a_b} = \frac{P_B}{P_b}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{H}{h}\right)^2 = \left(\frac{L}{l}\right)^2 = \cdots = \frac{A_B}{A_b} = \frac{A_L}{A_l} = \frac{A_T}{A_t}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{H}{h}\right)^3 = \left(\frac{L}{l}\right)^3 = \left(\frac{M}{m}\right)^3 = \cdots = \frac{V_P}{V_p}$$

TRUNCHIUL DE CON ABB′A′



$$A_l = \Pi \cdot G_{tr} \cdot (R + r)$$

$$A_t = A_B + A_b + A_l$$

$$A_B = \Pi \cdot R^2;$$

$$A_b = \Pi \cdot r^2;$$

$$V_{tr.} = \frac{\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)\cdot h_{tr}}{3}$$

$$V_{tr.} = V_{con\ mare} - V_{con\ mic}$$

Secțiunea axială :

Trapezul isoscel $ABB'A'$

h=$OO' \perp C(O,R)$

h=$OO' \perp C(O',r)$

Trapeze dreptunghice:

$O'OBB'$, $O'OAA'$

Con VAB~ Con VA′B′

$$\Rightarrow \frac{H}{h} = \frac{R}{r} = \frac{G}{g}$$

$$\left(\frac{H}{h}\right)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left(\frac{G}{g}\right)^2 = \frac{A_B}{A_b} = \frac{A_L}{A_l} = \frac{A_T}{A_t}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{H}{h}\right)^3 = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = \left(\frac{G}{g}\right)^3 = \frac{V_{Con}}{V_{con}}$$

BIBLIOGRAFIE

1. Ștefan Sabău, Dumitru Săvulescu, “Cum demonstrăm că …? (Probleme de geometrie plană)”, Editura “PARALELA 45”, 1995
2. Eduard Dăncilă, Ioan Dăncilă, “Matematica pentru performanță clasa a V-a”, Editura “Art”, 2014
3. Mic-Oprea Daniela, ”Metodica rezolvării problemelor de paralelism și perpendicularitate în geometria plană”, Lucrare metodico-științifică Gradul I , 2010